Workshop i Lister og Regneark

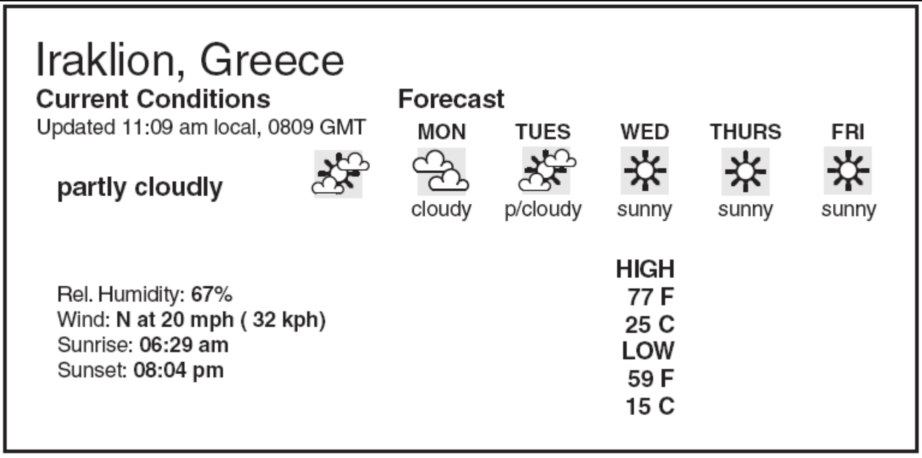
Indholdsfortegnelse:

Brian Olesen og Bjørn Felsager (rev. 2011)

1. Øvelser i variabelsammenhænge

Elementære modelleringsøvelser med TI-Nspire CAS

Lineære sammenhænge



I vejrprognoser på bl.a. internettet angives temperatur ofte i både grader celcius (C) og i grader fahrenheit (F). Udklippet viser et sådant eksempel, hvor kun den højeste og den laveste temperatur for onsdag er anført.

Der er en lineær sammenhæng mellem de to temperaturskalaer, dvs. der gælder at

$$y = ax + b,$$

hvor y er temperaturen i grader fahrenheit (F) og x er temperaturen i grader celcius (C).

a) Tegn ud fra udklippets oplysninger en graf, der viser temperaturen i grader fahrenheit som funktion af temperaturen i grader celcius, og bestem konstanterne a og b.

En dag er temperaturen 67 F.

b) Bestem den tilsvarende temperatur i grader celcius.

Eksempel: En elev gennemfører en test på en ergometercykel (kondicykel). Skemaet viser sammenhørende værdier af den effekt eleven yder og elevens puls

Effekt/Watt	75	100	150	200
Puls	92	108	131	154

Undersøg sammenhængen mellem pulsen og den ydede effekt.

Bemærkning: Når man kører kondicykel kan man typisk regulere belastningen og samtidigt aflæse effekten. Derved kan man selv vælge hvilken effekt man vil køre med. Samtidigt kan man måle pulsen med en pulsmåler. Det er derfor nærliggende at opfatte effekten som den uafhængige variabel som vi selv kan bestemme og pulsen som den afhængige variabel som vi måler.

Når ammoniumnitrat opløses i vand, falder vandets temperatur. I en forsøgsrække benyttes forskellige mængder ammoniumnitrat, der hver gang opløses i 170 g vand med starttemperaturen 22,0 °C. Skemaet viser opløsningens temperatur.

Opløst mængde ammoniumnitrat (g)	5,4	11,2	24,3	29,8	38,1
Opløsningens temperatur (°C)	20,0	17,8	13,6	11,4	8,7

a) Vis at opløsningens temperatur med god tilnærmelse er en lineær funktion f af den opløste mængde ammoniumnitrat.

b) Bestem en regneforskrift for funktionen f.

Til behandling af idrætsskader kan man benytte køleposer, der indeholder 190 g ammoniumnitrat og en lille pose med 170 g vand. Når køleposen skal bruges, vrides den, så den indlagte pose med vand går i stykker og ammoniumnitraten opløses i vandet.

c) Bestem $f(190)$.
Kommenter resultatet, idet det oplyses, at ved en afprøvning faldt køleposens temperatur fra 22 °C til –8 °C.

Til bestemmelse af en elevs kondital måles sammenhængen mellem elevens puls og iltoptagelse. Tabellen viser en række måleresultater.

Puls (slag pr. minut)	80	105	120	140	170	185
Iltoptagelse (L pr. minut)	0,70	1,50	1,90	2,45	3,30	3,90

a) Gør rede for, at iltoptagelsen med god tilnærmelse er en lineær funktion af pulsen.

b) Bestem en forskrift for denne lineære funktion.

Konditallet beregnes som

$$\textit{Kondital} = 1000 \cdot \frac{\textit{Iltoptagelse (L pr. minut) ved maksimal puls}}{\textit{Legemsvægt (kg)}}$$

Eleven vejer 78 kg og har en maksimal puls på 205 slag pr. minut.

c) Bestem iltoptagelsen ved 205 slag pr. minut, og beregn elevens kondital.

Omvendt proportionalitet

Eksempel:

Så lang tid er du om at forbrænde en genstand

	Tid om at forbrænde 1 genstand	
Vægt	Mænd	Kvinder
50 kg	1 time og 36 minutter	2 timer 24 minutter
60 kg	1 time og 20 minutter	2 timer
70 kg	1 time og 9 minutter	1 time 43 minutter
80 kg	1 time	1 time 30 minutter
90 kg	53 minutter	1 time 20 minutter
100 kg	48 minutter	1 time 12 minutter

Kilde: Pjece fra Sundhedsstyrelsen: Fakta om alkohol, 1997.

Undersøg sammenhængen mellem vægten og forbrændingstiden for mænd henholdsvis kvinder.

Hvor meget skal en kvinde veje for at have den samme forbrændingstid som en mand på 62 kg?

Eksempel:

Fotoet viser en opstilling til bestemmelse af lydens fart i luft. Den ene ende af et åbent rør er stukket ned i vand. Over røret er anbragt en højttaler, som udsender en tone med en valgt frekvens f. Røret flyttes op og ned for at finde de positioner af røret, hvor lyden forstærkes. For hver frekvens bestemmes afstanden ΔL mellem to nabopositioner, hvor lyden forstærkes. Lydbølgerne i røret har bølgelængden $2 \cdot \Delta L$.


FOTO: ELSEBETH PETERSEN

Tabellen viser sammenhørende værdier for frekvensen f og afstanden ΔL.

Bestem ud fra oplysningerne i tabellen en værdi for lydens fart i luft.

f / kHz	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	4,0
ΔL / m	0,144	0,110	0,083	0,070	0,060	0,053	0,050	0,043

Potensvækst

Linen med brudstyrke-garanti

Stærk og smidig!

SteelPower er linen for dig, der *hader* »overraskelser«, når de store hugger...

Damyl SteelPower – stærk som stål!

Diameter (i mm)	Brudstyrke (i kg)
0,16	2,40
0,18	3,15
0,20	3,80
0,22	4,30
0,25	5,30
0,30	7,70
0,35	10,40
0,40	13,00
0,45	16,30
0,50	20,00

Kilde: Fisk & Fri, nr. 1, *februar* 1998.

Vi tager denne gang udgangspunkt i det viste eksempel, hvor man får oplyst en tabel over sammenhængen mellem fiskelinens diameter i millimeter og dens brudstyrke i kg. Man hænger altså tungere og tungere lodder i enden af linerne indtil de sprænger, hvorefter man noterer massen af det kritiske lod.

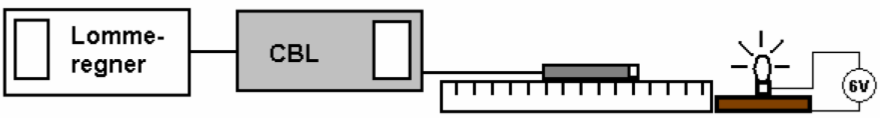
Undersøg sammenhængen!

Bemærkning: Der er tradition for at benytte potensregression til at finde ligningen. Som et alternativ kan man også forsøge at finde den bedste potenssammenhæng ved at variere potensen a i forskriften $y = b \cdot x^a$. Man må da binde startværdien b, fx ved hjælp af formlen

$$b = mean\left(\frac{y\_data}{x\_data^a}\right)$$

Parameteren a kan passende indføres som en skyder i **Data** og **Statistik**-værkstedet.

Variation over potensvækst: Lysintensitetens afstandsafhængighed



Da det areal lyset spredes over vokser med kvadratet på afstanden til lyskilden, forventer vi at lysintensiteten er omvendt proportional med kvadratet på afstanden. I et konkret forsøg fik man følgende data

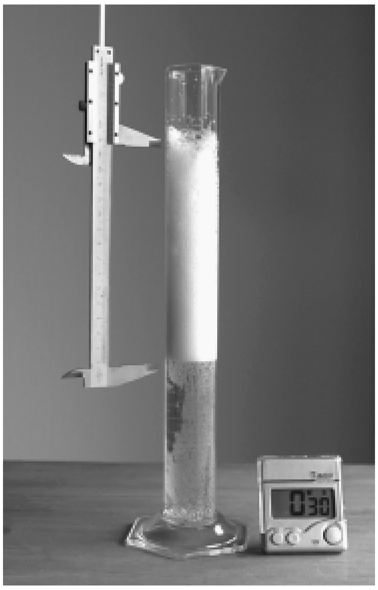
Afstand (cm)	10	15	20	25	30	35	40
Lysintensitet (mW/cm^2)	0.631	0.399	0.255	0.178	0.134	0.107	0.095

Undersøg om lysintensiteten er omvendt proportional med kvadratet på afstanden.

I virkeligheden ligger lysmåleren et stykke inde i sonden, og pæren står et stykke inde på brættet, hvorfor vi skal lægge en overskydende længde d til afstanden til pæren. Udnyt dette til at vise at lysintensiteten faktisk er omvendt proportional med kvadratet på afstanden.

Eksponentiel vækst

Vi tager udgangspunkt i et eksempel med ølskum, hvor man får oplyst højden *h* af ølskummet i cm som funktion af den tid *t* i sekunder, der er gået siden den velskummende øl blev hældt op i et måleglas. Vi vil nu undersøge om sammenhængen mellem tiden og højden med rimelighed kan beskrives ved en eksponentiel vækstmodel.



t	0	30	60	90	120	150	180	210	240	300	360
h	17,0	14,9	13,2	11,9	10,7	9,7	8,9	8,4	7,5	6,3	5,2

Undersøg sammenhængen!

Bemærkning: Der er tradition for at benytte eksponentiel regression til at finde ligningen. Som et alternativ kan man også forsøge at finde den bedste eksponentielle vækst ved at variere fremskrivningsfaktoren a i forskriften $y = b \cdot a^x$. Man må da binde startværdien *b*, fx ved hjælp af formlen

$$b = mean\left(\frac{y\_data}{a^{x\_data}}\right)$$

Parameteren a kan passende indføres som en skyder i **Data** og **Statistik**-værkstedet.

Variation over eksponentiel vækst: Afkøling af en kop te.

Ved afkøling af en kop te finder man fx de følgende data for teens temperatur som funktion af tiden:

Tid i minutter	0	15	30	45	60	90
Temperatur i °C	88.0	79.5	72.2	65.8	60.3	51.3

I følge Newtons afkølingslov nærmer teens temperatur sig nu stuetemperaturen eksponentielt, dvs. netop via en afhængighed af formen $y = b \cdot a^x + c$.

Vi skal derfor trække stuetemperaturen fra for at få en ren eksponentiel vækst. Da vi ikke kender stuetemperaturen indfører vi en skyder *c* og trækker værdien af c fra alle temperaturerne. gennemfør nu en eksponentiel regression for den korrigerede temperatur som funktion af tiden og tilpas værdien af stuetemperaturen *c*, så du får den bedst mulige eksponentielle vækstmodel.

Introduktion til NVG (lineære sammenhænge)

Aktivitet Densitet

(Brug sample data fra eksempelfilen!)

- **Formål og Hypotese**

Formålet med denne aktivitet er at forsøge at identificere en ukendt væske ved at bestemme en karakteristisk fysisk egenskab for væsken.

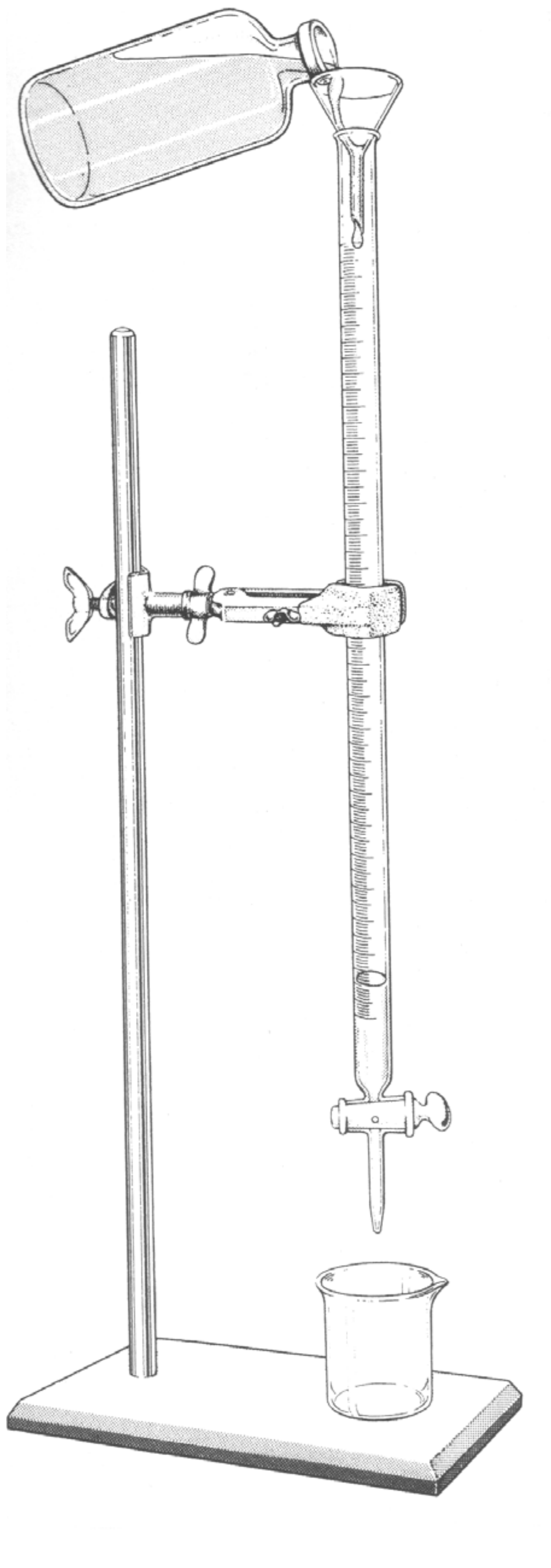
- **Teori**

I dette tilfælde drejer det sig om væskens **densitet**, ρ, (dvs. dens massefylde). Den er bestemt ved væskens masse, *m*, divideret med væskens volumen, *V*, (rumfang):

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \left[\frac{g}{mL}\right]$$

Der stilles to ukendte væsker til rådighed.
Hvis I har tiden, er det fint, hvis I får identificeret dem begge ☺

Materialer og opstilling



- **Fremgangsmåde**

Fremgangsmåden er den samme for begge væsker.

Den ukendte væske hældes op i buretten (glasrøret) og buretten nulstilles! (SPØRG OM HJÆLP ☺).

Et tomt bægerglas (100mL) anbringes på en vægt placeret under buretten.

Der tilsættes nu 1 mL væske fra buretten til bægerglasset og vægten aflæses.

Sådan fortsættes indtil man har tilsat 24 mL væske.

Måleresultaterne indføres i skemaerne som vist på næste side:

- **Resultater (skemaer mv)**

VÆSKE 1:

Volumen/mL	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0
masse1/g												
Volumen/mL	13.0	14.0	15.0	16.0	17.0	18.0	19.0	20.0	21.0	22.0	23.0	24.0
masse1/g												

VÆSKE 2:

Volumen/mL	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0
masse2/g												
Volumen/mL	13.0	14.0	15.0	16.0	17.0	18.0	19.0	20.0	21.0	22.0	23.0	24.0
masse2 g												

- **Dataanalyse, resultaterne gennemgås i forhold til hypotese og teori**
  - De opnåede data skal nu behandles i databehandlingsprogrammet **TI-Nspire**.
  - Skemaerne indskrives derfor som tabeller i **TI-Nspire** i et **Lister** og **Regneark**-værksted og de sammenhørende værdier mellem rumfanget **Volumen** og massen **masse1** hhv. **masse2** afbildes i et **(*V*, *m*)-diagram**, dvs. *V*-værdierne ud af *x*-aksen og *m*-værdierne op af *y*-aksen i et **Data og Statistik**-værksted. Det vil være flot, hvis du kan få begge serier af målinger afsat i samme diagram. Det kan netop lade sig gøre fordi vi har en fælles serie for den uafhængige variabel Volumen.
  - Den bedste rette linie (mindste kvadraters linje) lægges ind og hældningskoefficienten bestemmes.
  - Hældningskoefficienten angiver netop væskens densitet, og ved opslag i DATABOG fysik & kemi side **114/115** vil det være muligt at give et bud på, hvilken væske, der er tale om!
  - Hvordan skal en eventuel skæring med *m*-aksen tolkes?

Journalen skal bl.a. indeholde tabellerne med måleresultaterne, graferne med de tilføjede mindste kvadraters linjer, linjernes ligninger og forklaringsgrader, de fundne massefylder og forslagene til identifikation af de ukendte væsker.

- **Konklusion og fejlkilder**

Aktivitet: Det er nerver alt sammen …

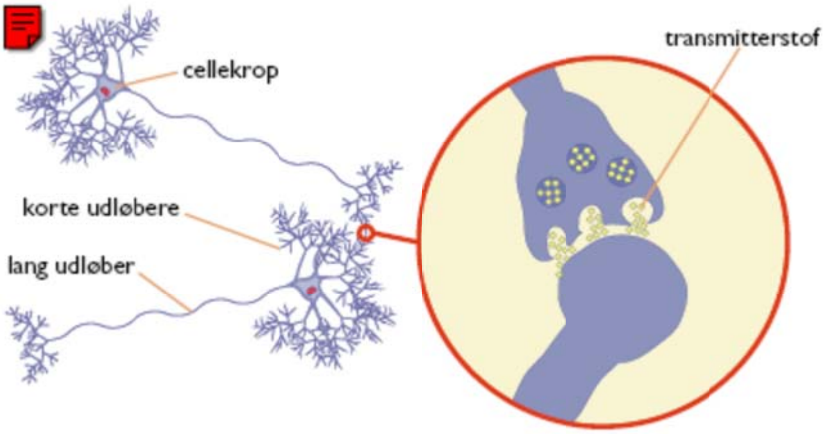
(Brug sample data fra eksempelfilen!)

- **Formål og Hypotese**
  I denne øvelse vil vi undersøge den hastighed, hvormed et signal forplanter sig gennem en menneskekæde.

- **Teori**
  Nervesystemet er en del af kroppens kommunikationssystem. En simpel beskrivelse af, hvad der sker, når der modtages et signal kan ses på denne figur.

(kilde: Idræt, Teori og Træning)

Sanseorganer findes blandet andet i hånden – vi kan mærke et klem. Signalet sendes fra hånd til hjerne.
Herefter kan der sendes et nyt signal fra hjerne til hånd, hvis der skal udføres et nyt klem.

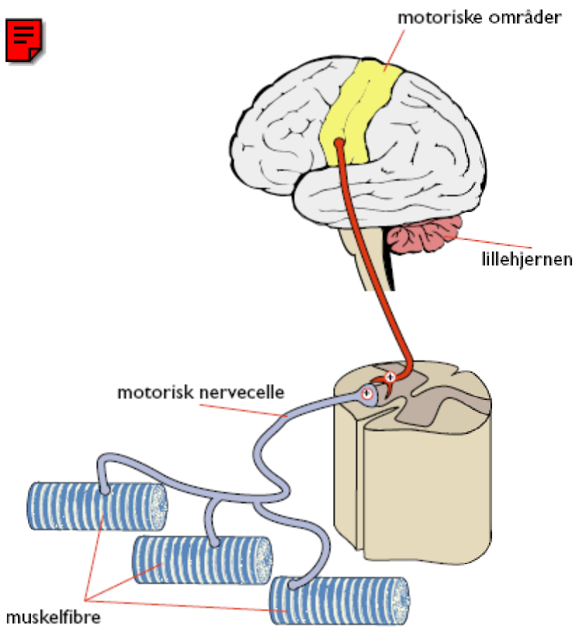


Skematisk tegning af en nervecelle. Cellekroppen med de mange korte udløbere kan sidde ude i musklerne, og den lange udløber sender signalet op til rygmarven, og herfra videre til hjernen.

Fra hjerne er der udløbere den anden vej så der kan sendes signaler ud til musklerne, der skal aktiveres.

Nervesystemet udgøres af hjerne-, rygmarven, nerverne og sanseorganerne.

Vi vil nu i en simpel opstilling undersøge hastigheden på signalet.

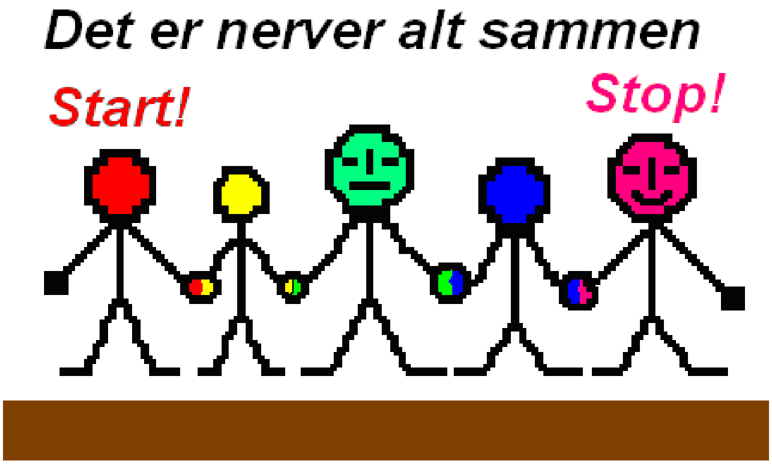


- **Materialer (vis gerne opstilling som indsatte tegninger)**
  Elever og stopure

- **Fremgangsmåde**
  Undersøgelse 1: Opstilling i kæde med hånd til hånd
  Undersøgelse 2: Opstilling i kæde med hånd til skulder

Undersøgelse 1: Opstilling i kæde med hånd til hånd

1. I stiller op i en kæde, så I holder hinanden i hænderne:



2. På et givet tegn (fx »Klar – parat – start«) startes signalet ved, at den første deltager giver den anden deltager et forsigtigt klem med hånden, som så giver klemmet videre til den tredje deltager osv. Når signalet når frem til den sidste i kæden, siger vedkommende "**Stop**", og der tages tid på, hvor lang tid signalet har brugt på at bevæge sig gennem kæden.

Resultaterne bliver bedre, hvis man fx bruger gennemsnittet af tre uafhængige tidsmålinger.

3. Der måles på kæder af forskellig længde. Fx 5, 10, 15, 20 og 25 personer i kæderne. Enten kan man lave én lang kæde, eller man kan lave flere små kæder. Det er fint at lade kæderne danne en rundkreds, så signalet kan gå rundt i kæden flere gange. Mål på mindst 5 forskellige kædelængder (med jævne mellemrum) og udfyld et skema som det nedenstående med gennemsnitstiden for signaltiden.

- **Resultater (skemaer mv)**

Håndklem:

Kædelængde n (antal personer)					
Signaltiden t (sek.)					

Undersøgelse 2: Opstilling i kæde med hånd til skulder

Vi er nu i stand til at udvide eksperimentet og dermed danne os et indtryk af følgende simple spørgsmål:

Hvor hurtigt bevæger et nervesignal sig egentligt?

Vi kan nemlig danne os et indtryk af, hvor lang tid nervesignalet tilbringer i nervebanerne fra hånden og op til hjernen, ved at gentage eksperimentet, hvor vi i stedet for at holde hinanden i hånden lægger hånden på skulderen. I så fald sparer vi nemlig netop turen fra hånden op til skulderen:

Udfør det nye eksperiment, med skulderklem i stedet for håndklem. Det er smart at benytte de samme kædelængder som i det første eksperiment!

Skulderklem

Kædelængde n (antal personer)					
Signaltiden t (sek.)					

- **Databehandling/journal:**
- *Dataene skrives ind som tabeller i* ***Lister og Regneark****-værkstedet i* ***TI-Nspire*** *og der laves grafer i* ***Data og statistik****-værkstedet, der viser signaltiderne for de to eksperimenter, som funktion af kædelængden, dvs. kædelængderne afsættes vandret og signaltiderne afsættes lodret. Det vil være flot, hvis de to eksperimenter afsættes som to serier i det samme diagram! Højreklikkes i toppen af y-aksen kan man fx vælge menupunktet* ***Tilføj y-variabel****.*
- *Tilføj regressionslinjer (lineær regression $y = mx+b$) med såvel ligningerne som forklaringsgraden r^2 til de to serier af signaltider. Forklaringsgraderne udregnes i* ***Lister og Regneark****! Prøv også at tilføje residuelle kvadrater til regressionslinjerne.*
- *Hvad fortæller hældningerne for de to regressionslinjer om nervesignalets vej gennem kæden?*
- *Vurdér nu den hastighed, hvormed nervesignalet bevæger sig i armen!*
- *Hvilke usikkerheder er der på det målte?*
- *Vil resultatet blive bedre hvis undersøgelsen gentages mange gange?*

2. Eksempler på projekter med variabelsammenhænge

Tilfældige rektangler:

(Hent evt. eksempelfilen)

Tilfældige rektangler

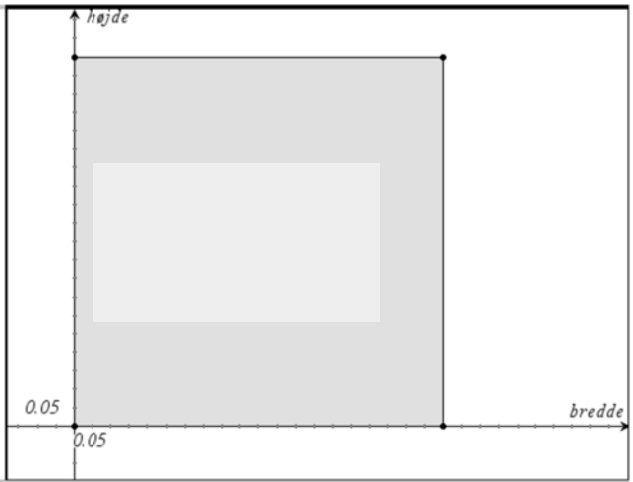
I denne øvelse vil vi undersøge sammenhængen mellem de forskellige variable, der karakteriserer et rektangel. Øvelsen bygger på den følgende liste af variable

bredde – højde – omkreds – areal

På næste side finder du et enhedskvadrat. Afsæt et tilfældigt punkt *P* i kvadratets indre og færdiggør rektanglet med Origo *O* (0,0) som nederste venstre hjørne og *P* som øverste højre hjørne ved først at konstruere de to sidste hjørnepunkter og dernæst bruge **polygon**–værktøjet.

Benyt nu **målinger** til at finde **koordinaterne** for *P* og **beregn** dernæst værdierne for de forskellige variable ud fra koordinaterne.

Træk i *P* og læg mærke til hvordan værdierne ændres.



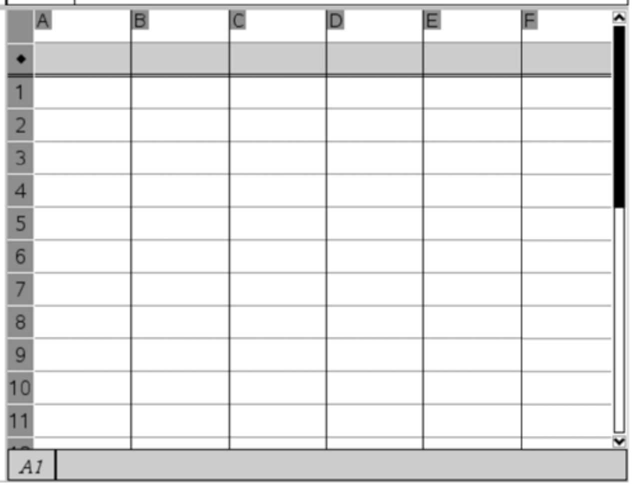
Det er på tide vi får konstrueret en stor database med 1000 rektangler, så vi kan undersøge sammenhængene nøjere.

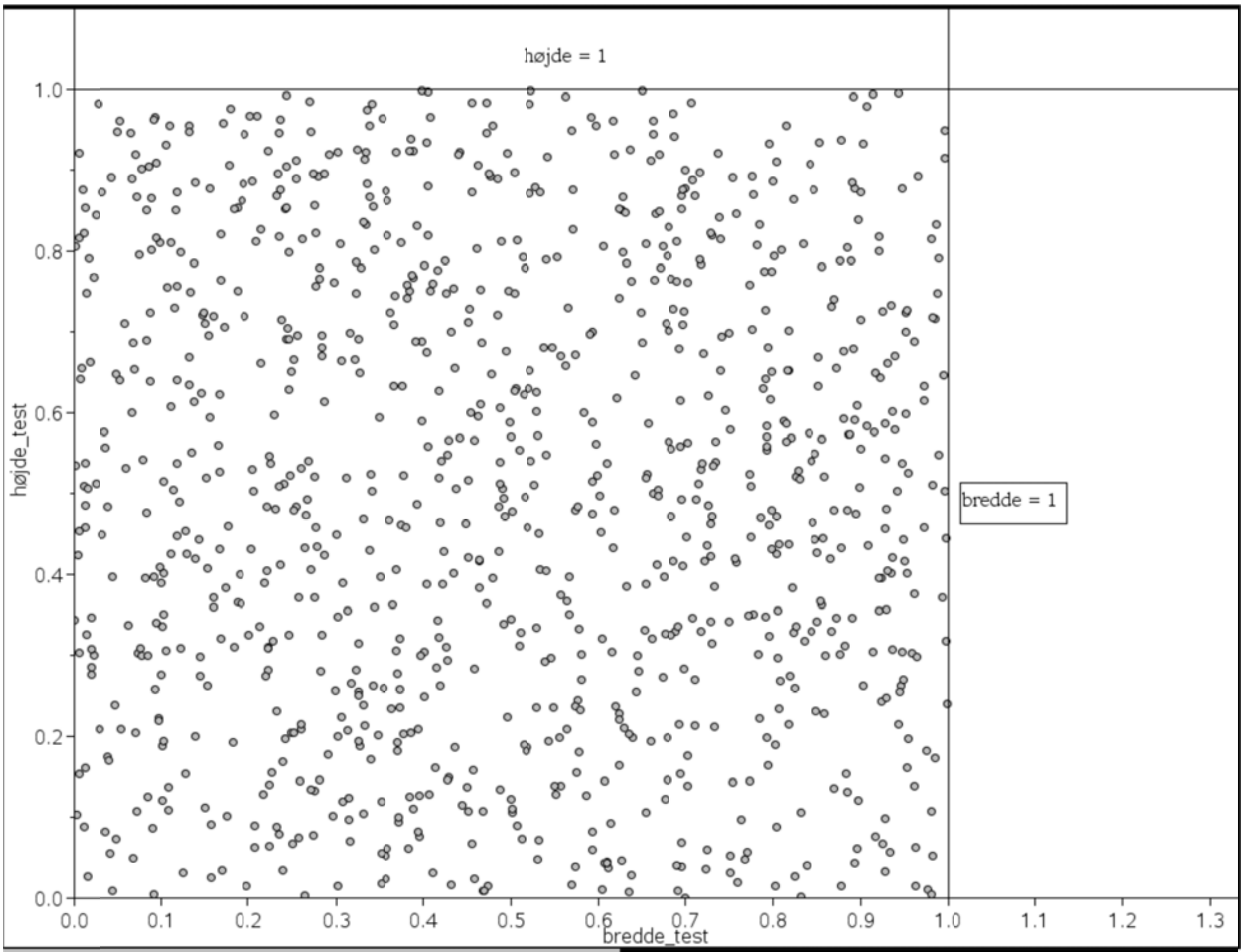
Frembring lister på den næste side for de forskellige variable, idet du bruger kommandoen **rand(1000)** for **bredde** og **højde** og passende formler for omkreds og areal.

Når listerne er klar kan du nu undersøge sammenhængene ved at overføre listerne til **Data og Statistik**–værktøjet. Hvilke figurer er der tale om? Hvad er ligningerne for randkurverne? Konstruer randkurverne ved hjælp af plot funktion (til vandrette og skrå linjer mm) henholdsvis plot værdi (til lodrette linjer), idet du gætter på passende ligninger for randkurverne.

Hvis du fx konstruerer punktplottet (**bredde**,**højde**) finder du som vist på næste side et kvadrat med siderne b=0, b=1, h=0 og h=1.

Tilføj nye sider til de andre sammenhænge.

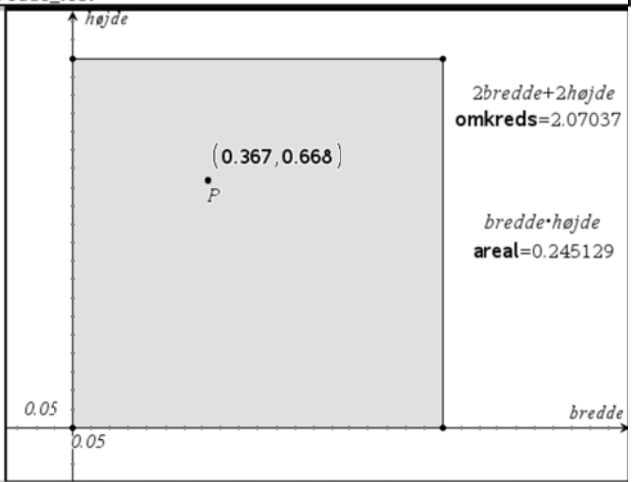




Indledning

Vi vil nu prøve at forstå, hvor de geometriske figurer fra første del af øvelsen kommer fra! Som en forberedende øvelse vender vi derfor tilbage til **værdierne** af de grundlæggende variable og **låser** værdierne en ad gangen. Træk i *P* og læg mærke til hvilken bane *P* følger.

På denne måde frembringer vi kurver hørende til familien af rektangler med samme **omkreds,** samme **areal** osv. Prøv nu at gætte ligningerne for dise geometriske steder og tegn graferne for disse ligninger, så du får tilføjet det geometriske sted for en konstant **omkreds,** et konstant **areal** osv. til din dynamiske figur.



Hvad er det der er specielt for de rektangler, hvor kurven for konstant **omkreds** netop tangerer kurven for konstant **areal**?

Hvor finder man rektanglet med det **største areal** langs kurven for konstant omkreds? Hvor finder man rektanglet med det **mindste areal?**

Vi vender nu tilbage til figurerne knyttet til forskellige kombinationer af variablene, fx (**bredde**,**omkreds**) og (**omkreds**, **areal**).

Hvilke slags rektangler hører til den øvre randkurve? hvilke slags hører til den nedre randkurve?

Kan du nu forklare ligningerne for randkurverne?

Klik for at tilføje variabel

Ingen lister i denne opgave

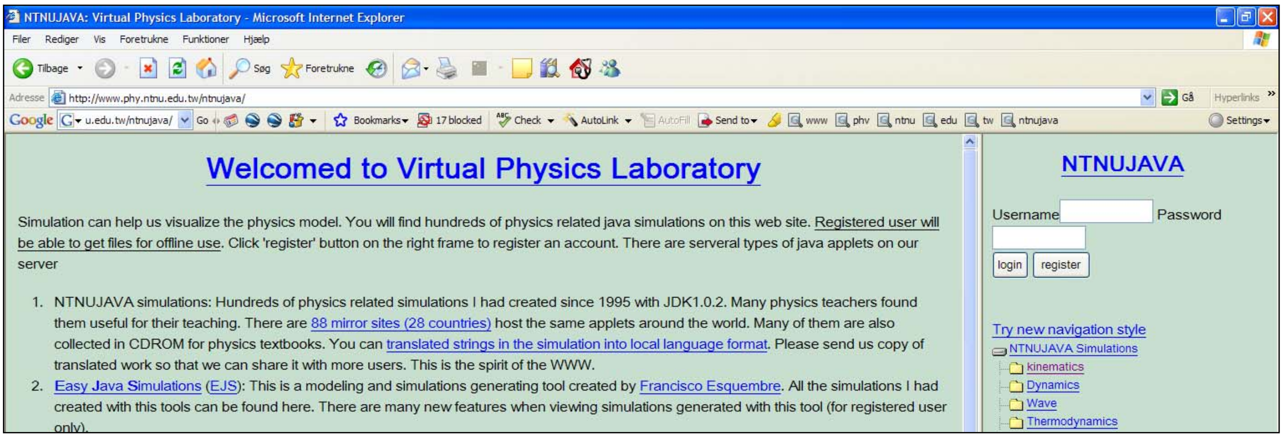
Klik for at tilføje variabel

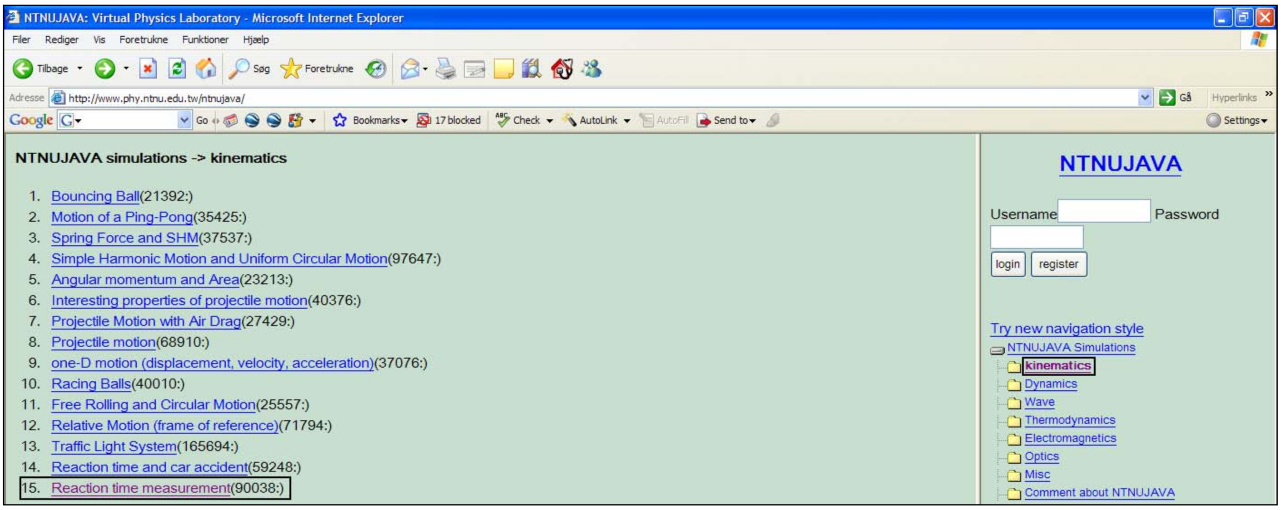
Variabelkontrol

For at kunne udføre en variabelkontrol i praksis skal vi først udføre et simpelt virtuelt eksperiment. Gå derfor ind på Google og søg på
NTNUJAVA

Så ryger I hurtigt ind på hjemmesiden
http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/

for **Virtual Physics Laboratory**. Her vælger I området **Kinematics** og eksperimentet **Reaction Time Measurement:**



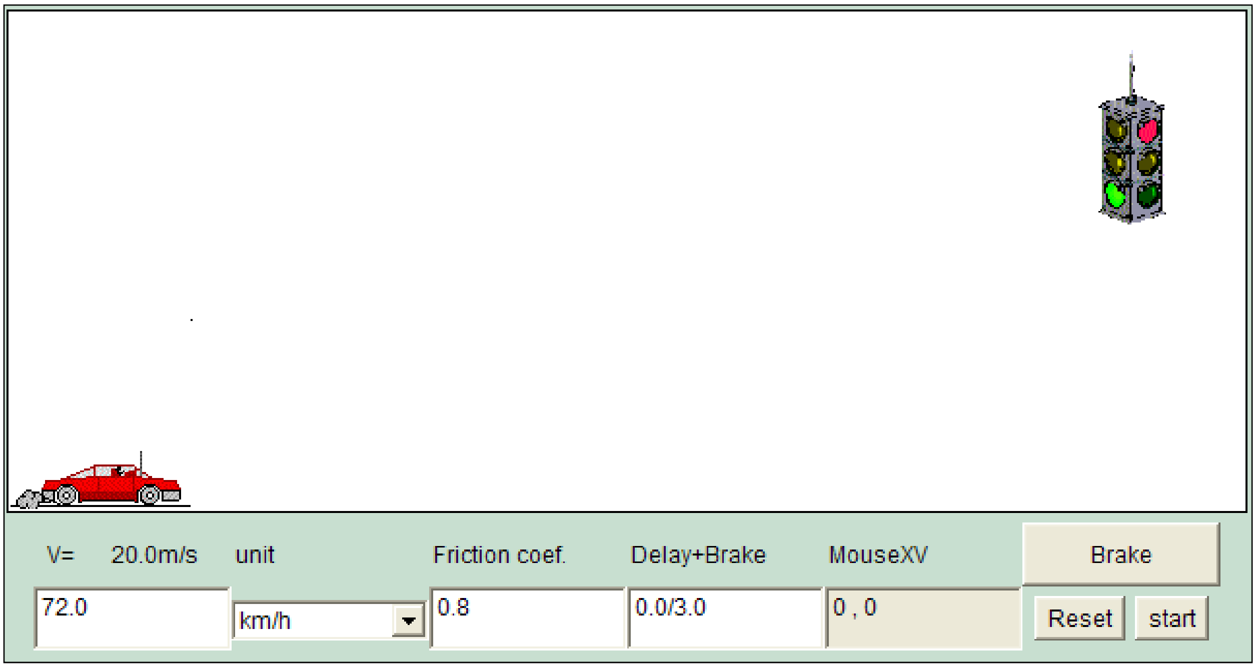


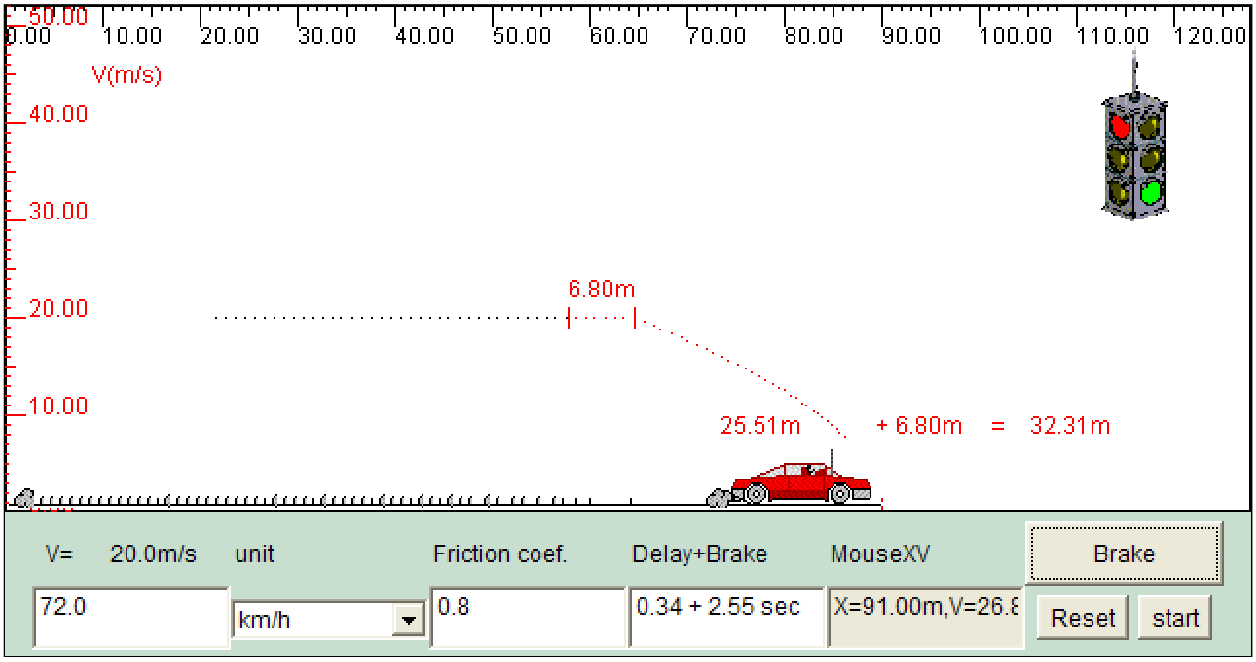
Der åbnes da for et eksperiment hvor man kan måle såvel reaktionstid som bremselængde for en bil. Ideen er nu at man skal sætte bilen i bevægelse og vente på det bliver rødt. Man trykker da så hurtigt som muligt på bremsen og ser hvor hurtigt man har reageret – og hvor langt bilen når at køre imens. I første runde får I hjælp idet stoplyset første gang skifter til gult. Det er en prøverunde, så den tæller ikke med i den endelige databehandling!

Overvej nu:

Hvilke variable indgår i eksperimentet?
Hvilke sammenhænge kan I finde mellem disse variable?

Kig gerne på billedet på næste side!





Overvej nu hvordan I kan tilrettelægge jeres målinger så I kan undersøge disse variabelsammenhænge. Vi har tidligere kigget på sammenhængen mellem reaktionstiden og reaktionslængden, så den behøver I ikke undersøge igen og den behøver ikke indgå i rapporten.

Husk at medtage tabeller, grafer og ligninger som dokumentation for de fundne sammenhænge.

Prøv også at forklare, hvad der menes med variabelkontrol :-)

Eksempler på hypoteser/data til variabelkontrol: (uddrag af en elevrapport!)

Bremselængdens afhængighed af reaktionslængden:

Hypotese:

Jeg forventer en konstant sammenhæng. Dette betyder, at bremselængden ikke er afhængig af reaktionslængden, og at grafen derfor vil tage form som en vandret linie.

Målinger:

Bremselængens afhængighed af reaktionslængden

	Bremselængde	Reaktionslængde	Friktion	Hastighed
enhed	meter	meter		m/s
=				
1	25,51 m	7,5 m	0,8	20 m/s
2	25,51 m	12,82 m	0,8	20 m/s
3	25,51 m	16,88 m	0,8	20 m/s
4	25,51 m	27,5 m	0,8	20 m/s
5	25,51 m	28,11 m	0,8	20 m/s
6	25,51 m	29,68 m	0,8	20 m/s
7	25,51 m	29,06 m	0,8	20 m/s
8	25,51 m	30,64 m	0,8	20 m/s
9	25,51 m	32,82 m	0,8	20 m/s

Bremselængdens afhængighed af friktionen:

Hypotese:

Jeg forventer at denne sammenhæng er faldende. Dette betyder, at hvis den ene bliver større, bliver den anden mindre. Måske har vi med en omvendt proportionalitet at gøre!

Målinger:

Bremselængdens afhængighed af friktionen

	Bremselængde	Friktion	Hatighed	Reaktionslængde
enhed	meter		m/s	meter
=				
1	136,05 m	0,15	20 m/s	8,12 m
2	102,04 m	0,20	20 m/s	7,82 m
3	81,63 m	0,25	20 m/s	6,56 m
4	51,02 m	0,40	20 m/s	7,50 m
5	40,81 m	0,50	20 m/s	5,94 m
6	34,01 m	0,60	20 m/s	6,58 m
7	29,15 m	0,70	20 m/s	5,94 m
8	25,51 m	0,80	20 m/s	13,44 m
9	22,67 m	0,90	20 m/s	5,62 m
10	20,40 m	1,00	20 m/s	7,19 m

Bremselængdens afhængighed af hastigheden:

Hypotese:

Jeg forventer en voksende sammenhæng. Hvis hastigheden vokser bliver bremselængden længere.

Målinger:

Bremselængdens afhængighed af hastigheden

	Bremselængde	Hastighed	Friktion	Reaktionslænde
enhed	meter	m/s		meter
=				
1	1,59 m	5 m/s	0,8	2,03 m
2	6,37 m	10 m/s	0,8	3,91 m
3	14,34 m	15 m/s	0,8	4,92 m
4	25,51 m	20 m/s	0,8	6,86 m
5	39,85 m	25 m/s	0,8	8,57 m
6	57,39 m	30 m/s	0,8	9,39 m
7	78,12 m	35 m/s	0,8	12,60 m
8	102,04 m	40 m/s	0,8	11,84 m
9	129,14 m	45 m/s	0,8	14,04 m
10	159,43 m	50 m/s	0,8	14,85 m

Stoplængdens afhængighed af reaktionslængden:
Hypotese: Jeg forventer en lineær sammenhæng – Altså at reaktionslængden vokser med stoplængden.
Målinger:

Stoplængdens afhængighed af reaktionslængden

	Stoplængde	Reaktionslængde	Bremselængde	Friktion	Hastighed
1	33,01 m	7,5 m	25,51 m	0,8	20 m/s
2	38,33 m	12,82 m	25,51 m	0,8	20 m/s
3	42,39 m	16,88 m	25,51 m	0,8	20 m/s
4	53,01 m	27,5 m	25,51 m	0,8	20 m/s
5	53,62 m	28,11 m	25,51 m	0,8	20 m/s
6	55,19 m	29,68 m	25,51 m	0,8	20 m/s
7	54,57 m	29,06 m	25,51 m	0,8	20 m/s
8	56,15 m	30,64 m	25,51 m	0,8	20 m/s
9	58,33 m	32,82 m	25,51 m	0,8	20 m/s

Stoplængdens afhængighed af friktionen:
Hypotese: Jeg forventer en omvendt proportionalitet. Jo større min friktion er desto kortere må min stoplængde være.
Målinger:

Stoplængdens afhængighed af friktionen

	Stoplængde	Friktion	Bremselængde	Hatighed	Reaktionslængde
enhed	meter		meter	m/s	meter
=	Bremselængde + Reaktionslængde				
1	144,17 m	0,15	136,05 m	20 m/s	8,12 m
2	109,86 m	0,20	102,04 m	20 m/s	7,82 m
3	88,19 m	0,25	81,63 m	20 m/s	6,56 m
4	58,52 m	0,40	51,02 m	20 m/s	7,50 m
5	46,75 m	0,50	40,81 m	20 m/s	5,94 m
6	40,59 m	0,60	34,01 m	20 m/s	6,58 m
7	35,09 m	0,70	29,15 m	20 m/s	5,94 m
8	38,95 m	0,80	25,51 m	20 m/s	13,44 m
9	28,29 m	0,90	22,67 m	20 m/s	5,62 m
10	27,59 m	1,00	20,40 m	20 m/s	7,19 m

Stoplængdens afhængighed af hastigheden:
Hypotese: Jeg forventer en voksende sammenhæng.
Målinger:

Stoplængden afhængighed af hastigheden

	Stoplængde	Hastighed	Bremselængde	Friktion	Reaktionslænde
enhed	meter	m/s	meter		meter
=	Bremselængde + Reaktionslænde				
1	3,62 m	5 m/s	1,59 m	0,8	2,03 m
2	10,28 m	10 m/s	6,37 m	0,8	3,91 m
3	19,26 m	15 m/s	14,34 m	0,8	4,92 m
4	32,37 m	20 m/s	25,51 m	0,8	6,86 m
5	48,42 m	25 m/s	39,85 m	0,8	8,57 m
6	66,78 m	30 m/s	57,39 m	0,8	9,39 m
7	90,72 m	35 m/s	78,12 m	0,8	12,60 m
8	113,88 m	40 m/s	102,04 m	0,8	11,84 m
9	143,18 m	45 m/s	129,14 m	0,8	14,04 m
10	174,28 m	50 m/s	159,43 m	0,8	14,85 m

Tværfagligt forløb – Det skrå kast

Hvilke bevægelsesbaner følger objekter efter et skrå kast?

Studieplan

Forløbet gennemføres som tværfagligt forløb mellem MAT-A/B (BO) og FYS-B/C (FE). Eleverne har stiftet bekendtskab med regressionsmodeller forud for forløbet samt arbejdet med variabelsammenhæng og ligningsløsning.

Formål

Eleverne skal arbejde eksperimentelt. De skal blive fortrolige med den naturvidenskabelige hypotese-deduktive metode hvor de ved hjælp af eksperimenter skal kunne opstille og afprøve hypoteser samt indse matematiske/fysiske sammenhænge og anvende resultater i forhold til tekniske færdigheder i idræt.

Mål

Som resultat af forløbet skal eleverne:

- indse, at der findes umiddelbare sammenhænge mellem de tre fag.
- via det eksperimentelle arbejde forholde sig kritiske til forsøgsmetode og opstilling.
- lære at se den fysiske kasteparabel i de idrætter de normalt beskæftiger sig med, og beskrive det med matematiske/fysiske udtryk.
- udnytte udledt viden til at udvikle deres tekniske færdigheder indenfor basketball.

Produkt krav

Grupperapport udarbejdet i **TI-Nspire**.

Udbytte

Eleverne skal ud fra en billedserie udlede måleresultater, som sætter dem i stand til ved regression at kunne opstille en hypotese om en basketballs bane i luften efter et skrå kast (øvelse 1). Eleverne skal herefter ved hjælp af videooptagelse af skrå kast kunne opstille og gennemføre et eksperiment for testning af deres hypotese (øvelse 2). Eleverne skal ved hjælp af regression i programmet **Logger Pro** teste deres hypotese. Eleverne skal herefter udarbejde en grupperapport i **TI-Nspire** hvor de redegør for og diskuter deres resultater.

Data og resultater (øvelser)

To øvelser danner grundlag for den rapport der kræves udarbejdet.

- Øvelse 1 gennemføres umiddelbart efter introduktionen til forløbet (det første modul) og danner grundlag for opstilling af en hypotese.
- Øvelse 2 fungerer som en afprøvning af hypotesen der er opstillet på baggrund at øvelse 1.
- Der udleveres en tastevejledning til programmet Logger Pro til løsning af øvelse 2.

Gruppeinddeling

Eleverne arbejder i grupper af 4 personer og forløbet gennemføres på 9 moduler.

Elev	Gruppe
	1
	1
	1
	1
	2
	2
	2
	2
	3
	3
	3
	3

Elev	Gruppe
	4
	4
	4
	4
	5
	5
	5
	5
	6
	6
	6
	6

Forløbsplan

<table>
<tr>
<td>1. lektion</td>
<td>
Introduktion og opstilling af hypotese

Introduktion til forløb (udlevere reviderede forløbsplan og gennemgang)
Inddeling i grupper (jf. plan)
Videnskabsteori (opstile hypotese, reproduktion som verifikation af hy-potese - test)
Lectio – studieplan og dokumenter med gruppeinddelinger
EDB lokaler til rådighed
Øvelse 1 (udlevere kopier); Vis aflæsning af koordinater, tegn kurve på mm. papir, beskriv kurve.
Øvelse 1; Regression ved hjælp af TI-Nspire. Afprøv kurver: Lineære og potens kurver
Øvelse 1; Beskriv sammenhæng og opstil hypotese med forudsætnin-ger
Lektie: Læs side 124-126

Huskeliste

Bærbar computer
Skærmkabel
Materialer
Kontroller program: TI-Nspire

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>2. lektion</td><td>
Optagelse af kast (i hal)

Optagelse af et skrå kast med et digitalt kamera. Overvej inden optagelsen hvorledes og hvor kameraet skal opstilles og sørg for at anvende kalibreringskegler til afstandsmåling. Når den eksperimentelle opstilling er klar og kameraet anbragt i et stativ, indstilles kameraet til VIDEO og der trykkes på udløseren samtidigt med at eksperimentet startes. Med vort kamera kan man optage op til 6 sekunders video med 20 billeder pr. sekund. Videoen kan kontrolleres (afspilles) på kameraets display og om nødvendigt tages om.
Vælg objekt
Overførelse af videosekvens til computeren. Ved hjælp af kameraets lagringskort og kortlæseren kan videosekvensen overføres til en computer. Videooptagelsen overføres fra kameraet til computeren af lærerne og filerne kan hentes fra gruppens mappe på Lectio.

Huskeliste

Kamera
Kegler
Målebånd
Stativ til kamera

</td></tr>
<tr><td>3. lektion</td><td>
Teori og kvadratisk regression

Teorigennemgang: Karakteristika ved parablen, ligningen for parablen, betydning af koefficienter, forskydning af toppunkt, bestemmelse af toppunkt og nulpunkter
Regression ved LoggerPro
Overføring af resultater til TI-Nspire

</td></tr>
<tr><td>4. lektion</td><td>
Resultatbehandling

Overføring af resultater til TI-Nspire
Bestemmelse af sammenhæng i TI-Nspire, den matematiske sammenhæng der bedst beskriver fordelingen af punkter for den vandrette afstand x og den lodrette afstand y.
Vurdering af modellen herunder forklaringsgraden og residualplot. Udregning af forklaringsgrader
Diskuter hypotese, forsøgsopstilling (metode) og andre objekters bane
Bestem toppunkterne og nulpunkter
Vurder den betydning og konsekvens et lavt, mellem og højt toppunkt har for et kast med en basketbold

</td></tr>
</table>






(Uddrag af elevrapport)

INDLEDNING

Vores hypotese lyder: Vores basketbold vil gå som en parabel (kvadratisk sammenhæng). Dette sker fordi bolden starter i hovedhøjde, føres op i en bue og lander så tilsidst på jorden. Denne hypotese er desuden blevet skabt ud fra nogle oplysninger som Brian er kommet med. Vi har fået udleveret en række billeder og tilsvarende grafer. På disse billeder kan det ses, at basketboldens bane bliver afbildet som en parabel. Vi er dog ikke sikre på, at Brian taler sandt, da det kan være, han har manipuleret billederne ;) Derfor beslutter vi, at vi selv vil efterprøve hypotesen.

Til dette forsøg bruger vi skolens idrætshal. Vi får hver vores bold og skal på skift prøve at få bolden i nettet. Vi stiller to kegler op. Fra kegle nr. 1 til kegle nr. 2 er der tre meter. Vi fik hver to kast og skulle prøve at kaste bolden ned i nettet, der ligger 3 meter oppe fra gulvet. Alle vores kast blev filmet så både gulvet og nettet kunne ses. Herefter skal disse optagelser bruges til at undersøge boldens bane. Til dette bruges et program, LoggerPro. I LoggerPro markeres boldens bane (boldens centrum) og programmet giver os herefter en graf hvorpå boldens bane er afbildet. Vi får desuden oplyst tre variable, der indgik i forsøget. Tiden (tdata), længden (xdata) og højden (ydata). Vi skal nu prøve at bestemme sammenhængen melle hhv. tiden og længden, tiden og højden og til sidst længden og højden. Det er især sammenhængen mellem længden og højden, der er interessant, da det er ud fra disse to, at vores hypotese skal bekræftes/forkastes. Der skal også forklares hvad de forskellige koefficienter står for og residualplots skal beskrives. Dette er den matematiske del. Udover denne del skal rapporten også indeholde en fysik-del. I denne skal de samme sammenhænge beskrives - bare set fra en fysikers øjne :D.

OM ET ANDENGRADSPOLYNOMIUM

Ligningen for et andengradspolynomium er oplyst som; $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. I denne formel er $a \cdot x^2$ andengradsleddet, og årsagen til at der er samkke om en kvadratisk sammenhæng. $b \cdot x$ er førstegradsleddet, og c nultegradsleddet. Grafen for et andengradspolynomium bliver desuden afbildet som en parabel.
I ligningen optræder a som den koefficient der bestemmer parabelbenenes stejlhed og retning. Når a er et negativt tal, vender toppunktet opad (Maksimum). Når a så er et positivt tal, vender toppunktet nedad (minimum). a kan desuden ikke være 0, da dette så ville give en formel for en lineær vækst ($y = 0x^2 + bx + c \approx y = bx + c$).
Jo højere en værdi a har, jo smallere (/gladere) vil grafen være. Det er så det omvendte når værdien er lav.
B–værdien bestemmer hvilken side af koordinatsystemet grafens toppunkt skal ligge i. Hvis b er et negativt tal, vil toppunktet ligge på koordinatsystemets positive side (ved x–aksens højre side). Det er så omvendt når b er positiv. Når parablen har sit toppunkt nedad og b's værdi ændres, så vil toppunktets bane danne en parabel med toppunktet opad (minimum). I denne parabel vil a være det samme, bare med det modsatte fortegn. b er her altid 0, da parablens toppunkt ligger på y–aksen. c–værdien er dog det samme. Forskriften for den dannede parabel kan så vises som:
$y = -ax^2 + c$. C–værdien i forskriften for et andengradspolynomium er så skæringen med y–aksen. Når c er et negativt tal er parablens toppunkt under x–alsen (under 0;0). Når c derimod er et positivt tal er toppunktet over (0;0). c som skæring i y–aksen kan bevises når vores x er 0:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$
$$y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$
$$y = 0 + 0 + c$$
$$y = c$$

DE FYSISKE SAMMENHÆNGE/KOEFFICIENTER DER OPTRÆDER I RAPPORTEN

I denne rapport indgår der en del forskrifter for forskellige sammenhænge. Disse bliver nu forklaret meget kort og de tilhørende koefficienter forklares med.

I rapportens fysikdel vil følgende koefficienter dukke op:

$\mathbf{y_0}$	=	udgangshøjden	=	**1.52** & **1.57 m** (TI–NSpire gav to resultater!)
$\mathbf{v_x}$	=	vandrette udgangshastighed	=	**4.47 m/sek**
$\mathbf{v_y}$	=	lodrette udgangshastighed	=	**6.59 m/sek**
g	=	tyngdeacceleration	=	**10.04 m/s**^{2} (forklares senere)

I rapportens fysikdel vil følgende sammenhænge dukke op:

– Den vandrette bevægelse	$\mathbf{x = v_x \cdot t}$
– Den lodrette bevægelse uden tyngdekraft	$\mathbf{y_{uden} = v_y \cdot t + y_0}$
– Den lodrette bevægelse med tyngdekraft	$\mathbf{y_{med} = -0.5g \cdot t^2 + v_y \cdot t + y_0}$
– Det frie fald i tyngdefeltet	$\mathbf{s_{frit\ fald} = 0.5g \cdot t^2}$
– Den samlede bevægelse uden tyngdekraft	$\mathbf{y_{uden} = (v_y / v_x) \cdot x + y_0}$
– Den samlede bevægelse med tyngdekraft	$\mathbf{y_{med} = y_{uden} - s_{frit\ fald}}$

I rapporten skulle eleverne diskutere de tre sammenhænge:

tid versus længde **tid versus højde** **længde versus højde**

og i hvert enkelt tilfælde diskutere såvel den matematiske som den fysiske betydning af koefficienterne i de fundne ligninger.

Prøv selv med de vedlagte eksempeldata!

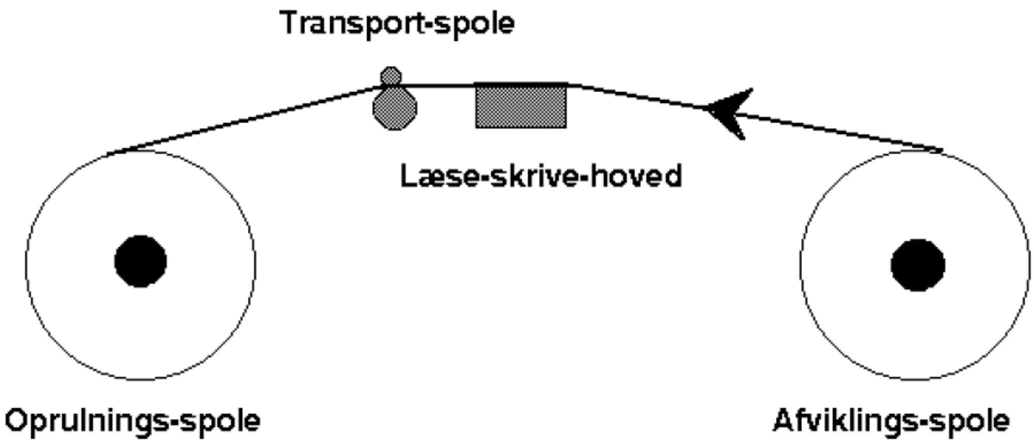
Kvadratiske modeller

Båndoptagerproblemet
Som optakt til kvadratiske modeller og som motivation for den efterfølgende lidt tørre teori, vil vi nu starte med at se på et konkret problem[1]. Når man afspiller et bånd på en båndoptager (eller en video) er der en tæller på, som viser hvor langt man er kommet på båndet. Man kan da spørge: Hvordan afhænger spilletiden af båndtælleren? Vi vil først forsøge os med en rent **beskrivende model baseret på målinger**. Vi sætter derfor et 30 minutters bånd i båndoptageren og noterer tidspunkterne for hver gang, der er foretaget 50 tællinger på båndtælleren. Resultaterne fremgår af den følgende tabel:

Tæller	0	50	100	150	200	250	300	350	400
Tid /s	0	141	301	481	681	902	1143	1403	1684

Hvordan afhænger tiden nu af tælletallet?

Vi går derefter over til at se på en *forklarende model* baseret på *teori*. Det er selvfølgelig mere kompliceret, fordi det ydermere kræver en vis indsigt i opbygningen af en båndoptager (videooptager osv.)



Båndet føres forbi et skrive-læse-hoved med konstant hastighed v_0. Båndet ligger på en afviklingsspole og føres over på en oprulningsspole. Tælleren er knyttet til denne oprulningsspole, og det er rimeligt at antage, at den er proportional med antallet af omdrejninger, dvs. vindingstallet n for oprulningsspolen. Det er selvfølgelig en antagelse, som bør efterprøves eksperimentelt! Men her vil vi altså blot gå ud fra antagelsen:

$$tæller = k \cdot n$$

hvor k altså skal fastlægges eksperimentelt. Da båndet fylder mere og mere på oprulningsspolen vil denne *ikke* dreje med konstant hastighed, idet omkredsen bliver større og større. Båndet vikles op omkring en kerne med radius r_0. Hvis båndet har tykkelsen h, vil radius derfor vokse fra r_0 til $r_0 + n \cdot h$ i løbet af n omdrejninger. Omkredsen vil tilsvarende vokse fra $2\pi\, r_0$ til

$$2\pi r = 2\pi \cdot (r_0 + n \cdot h)$$

i løbet af n omdrejninger. Da omkredsen vokser jævnt med antallet af omdrejninger, må den samlede båndlængde efter n omdrejninger derfor svare til

$$n \cdot 2\pi r_{\text{middel}},$$

hvor middelradien er givet ved

$$r_{middel} = \frac{r_0 + (r_0 + n \cdot h)}{2} = r_0 + \frac{n}{2} \cdot h$$

Men den samlede båndlængde må også være givet ved hastigheden v_0 ganget med tiden *tid*, dvs. vi har den følgende sammenhæng:

$$n \cdot 2\pi \cdot \left(r_0 + \frac{n}{2} \cdot h \right) = v_0 \cdot tid$$

Indsætter vi heri sammenhængen *tæller* = $k \cdot n$, fås nu den ønskede sammenhæng:

$$\frac{tæller}{k} \cdot 2\pi \cdot \left(r_0 + \frac{tæller}{2k} \cdot h \right) = v_0 \cdot tid \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi \cdot r_0}{k} \cdot tæller + \frac{\pi \cdot h}{k^2} \cdot tæller^2 = v_0 \cdot tid \Rightarrow$$

$$tid = \frac{2\pi \cdot r_0}{k \cdot v_0} \cdot tæller + \frac{\pi \cdot h}{k^2 \cdot v_0} \cdot tæller^2$$

Vi har altså fundet en teoretisk model, der forudsiger, at *tiden y* vokser som et andengradspolynomium $a \cdot x^2 + b \cdot x$ af *tælletallet x*.
For nu at undersøge sammenhængen mellem den teoretiske model og den empiriske model nærmere, består det næste så i at forklare talværdierne for koefficienterne i den beskrivende model. Her har vi fundet de følgende teoretiske udtryk for koefficienterne:

$$a = \frac{\pi \cdot h}{k^2 \cdot v_0}; \quad b = \frac{2\pi \cdot r_0}{k \cdot v_0}$$

Hvis vi måler *båndtykkelsen h* (eller har tekniske specifikationer på båndet, der giver os værdien direkte), måler den indre radius for oprulningsspolen r_0 , måler gennemløbshastigheden v_0 og proportionalitetskonstanten k mellem vindingstallet for oprulningsspolen og tælletallet, så vil vi direkte kunne indsætte og finde talværdierne for koefficienterne. I ovenstående eksempel viste det sig for eksempel, at de nævnte parametre kunne fastlægges til:

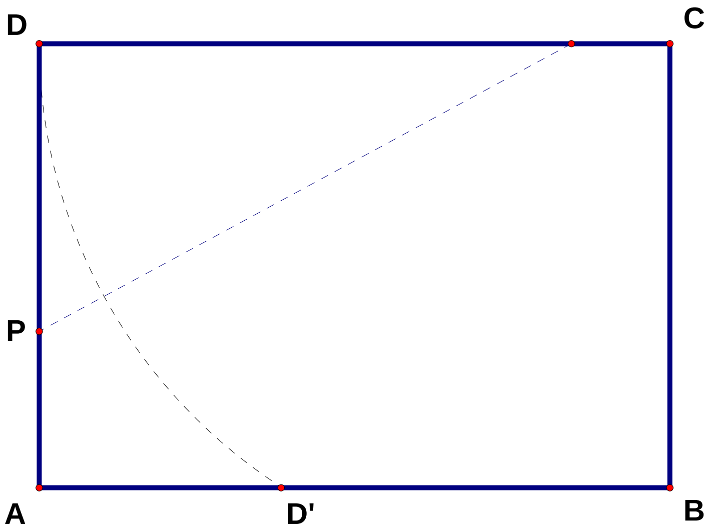
Båndtykkelse	*h*	0.0018 cm
Indre radius	*r0*	1.1 cm
Proportionalitetskonstant	*k*	0.55
Gennemløbshastighed	*v0*	4.76 cm/s

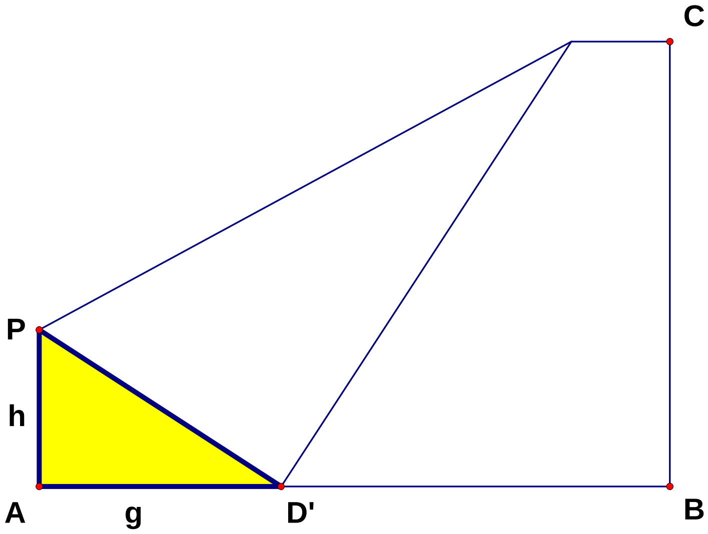
Hvordan passer det med den empiriske model?

Bemærkning: Man kan opnå en dybere indsigt i modellen ved at undersøge den med en multipel lineær regression, idet man da også får mulighed for at inddrage fx konfidensintervaller for koefficienterne og dermed kan man vurdere, hvilke koefficienter, der er signifikant forskellige fra 0.

Kubiske modeller: Trekantsfoldning

Som et konkret eksempel på et geometrisk eksperiment med en righoldig datastruktur vil vi se på et klassisk eksperiment, hvor man folder et papir for at frembringe en trekant. Det øverste venstre hjørne **D** foldes altså ned på grundlinjen **AB**, hvorved der som vist fremkommer en retvinklet trekant **ADP**:



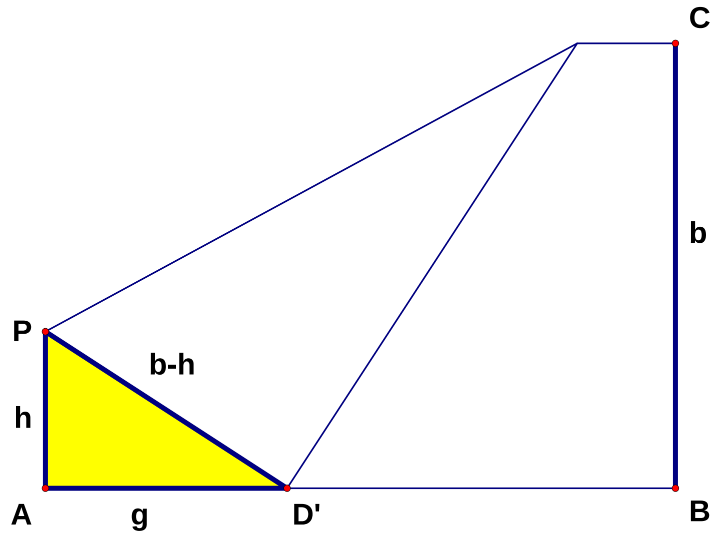


Vi vil nu undersøge **arealet** for denne trekant som funktion af **grundlinjen g**. Vi tildeler derfor eleverne forskellige grundlinjer og beder dem måle omhyggeligt (med 1 mm's nøjagtighed) den tilhørende **højde h**. I et konkret eksperiment med foldning af et A4-ark fandt vi de følgende værdier:

Uafhængig **grundlinje**/cm	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Afhængig **højde**/cm	10,49	10,35	10,1	9,62	9,0	8,1	6,98	5,85	4,4	2,8	0,98

Undersøg sammenhængen!

Avanceret slutspil:
Når vi først er kommet så langt kan man nemt blive nysgerrig efter at få at vide hvad det egentlig er der ligger bag modellens succes! Hvad er teorien bag tredjegradspolynomiet? Nøglen til at finde ud af dette ligger i konstruktionen af trekanten:



Hvis vi først lægger mærke til at hypotenusen er tæt knyttet til papirbredden **b** kan vi benytte Pythagoras til at sammenknytte højden med grundlinjen:

$$\mathbf{h}^2 + \mathbf{g}^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{h})^2 \Rightarrow$$
$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{b}^2 - \mathbf{g}^2}{2\mathbf{b}}$$

Det viser sig altså at højden rent faktisk er en kvadratisk funktion af grundlinjen. Men så følger det jo umiddelbart at arealet må være en kubisk funktion af grundlinjen:

$$\mathbf{Areal} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{h} = \frac{\mathbf{b}^2 \cdot \mathbf{g} - \mathbf{g}^3}{4\mathbf{b}}$$
$$= \frac{\mathbf{b}}{4} \cdot \mathbf{g} - \frac{1}{4\mathbf{b}} \cdot \mathbf{g}^3$$

Teoretisk skulle vi altså endda forvente at arealet er en ulige funktion af grundlinjen, så faktisk bør vi også manuelt fjerne det kvadratiske led! Ydermere afhænger arealfunktionen kun af en enkelt parameter, nemlig papirbredden **b**. De to sidste koefficienter må derfor være knyttet tæt sammen. Faktisk må deres produkt være givet ved

$$-1/16 = -0.0625.$$

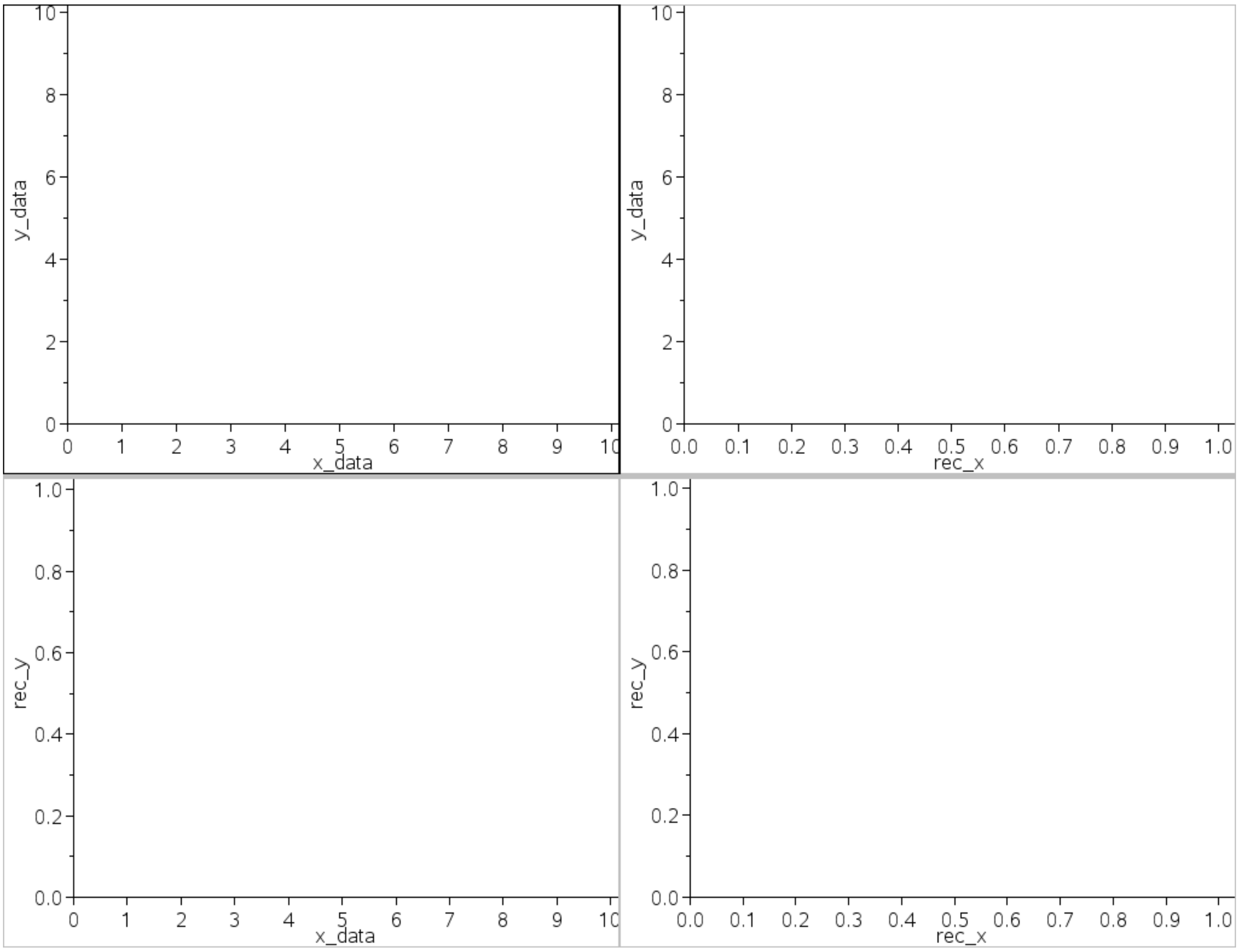
Hvordan passer den teoretiske model med den empiriske model, der er baseret på et A4-ark?

Bemærkning: Man kan opnå en dybere indsigt i modellen ved at undersøge den med en multipel lineær regression, idet man da også får mulighed for at inddrage fx konfidensintervaller for koefficienterne og dermed kan man vurdere, hvilke koefficienter, der er signifikant forskellige fra 0.

Modeller med TI-Nspire CAS: Den ligesidede hyperbel = den forskudte omvendte proportionalitet

For at teste en forskudt omvendt proportionalitet $y = \frac{a}{x-h} + k$, dvs. at datapunkterne ligger på en ligesidet hyperbel med den lodrette asymptote $x = h$ og den vandrette asymptote $y = k$, bør man i første omgang teste for en lineær sammenhæng mellem en af kombinationerne $(1/x, y)$, $(x, 1/y)$ og $(1/x, 1/y)$. Det gøres i praksis ved at tegne alle fire grafer:

A x_data	B y_data	C rec_x	D rec_y
		=1/x_data	=1/y_data



Hvis en af de tre supplerende grafer ligger på ret linje har vi fundet en simpel model, hvor enten en af koordinatakserne er en asymptote eller grafen går gennem (0,0).

I modsat fald kan man stadigvæk forsøge sig med en **multipel lineær regression** for at teste om produktet $x \cdot y$ afhænger lineært af de i denne sammenhæng to uafhængige variable x og y: $x \cdot y = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot y$

Med en rimelig forklaringsgrad og tilfældigt varierende residualer har man så et bud på en rimelig model for data i form af en generel forskudt omvendt proportionalitet: $y = \frac{a}{x-h} + k$, hvor vi har isoleret y i den ovenstående ligning.

Eksempel 1: Jorden befolkningstilvækst (supereksponentiel vækst)

	A årstal	B befolkning
◆		
1	1000	200
2	1650	545
3	1750	728
4	1800	906
5	1850	1171
6	1900	1608
7	1910	1750
8	1920	1834
9	1930	2070
10	1940	2295
11	1950	2517
12	1955	2780
13	1960	3005
14	1965	3345
15	1970	3707
16	1975	4086
17	1980	4454
18	1985	4850

Dette er standardeksemplet på en supereksponentiel vækstmodel. Her ses **data** for jordens befolkning fra år 1000 til år 1985 (i millioner).

Undersøg om grafen kan fittes med en ligesidet hyperbel og kommenter modellen!

Bemærkning: Modellen er meget berømt og går under kælenavnet **Dommedagsmodellen**. Det er (desværre!) stadigvæk en af de bedste modeller til fremskrivning af Jordens samlede befolkning.

Hvorfor har den fået navnet **Dommedagsmodellen**?

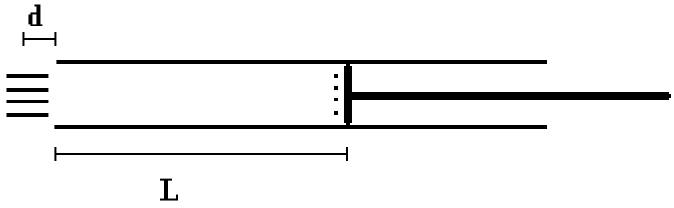
Eksempel 2: Reaktionshastigheden for et enzym som funktion af substratets koncentration (hæmmet proportional vækst)

	A c_data	B v_data
◆		
1	7.9	6
2	10.	7
3	13.6	9
4	26.2	12.5
5	67.6	19
6	99.6	20.5
7	137	22

I et klassisk forsøg af Kuhn fra 1923 fandt man følgende data for koncentrationen c og hastigheden v (i enheder, der er uden betydning for resten af opgaven).

Undersøg om grafen kan fittes med en ligesidet hyperbel og kommenter modellen!

Eksempel 3: Randeffekten

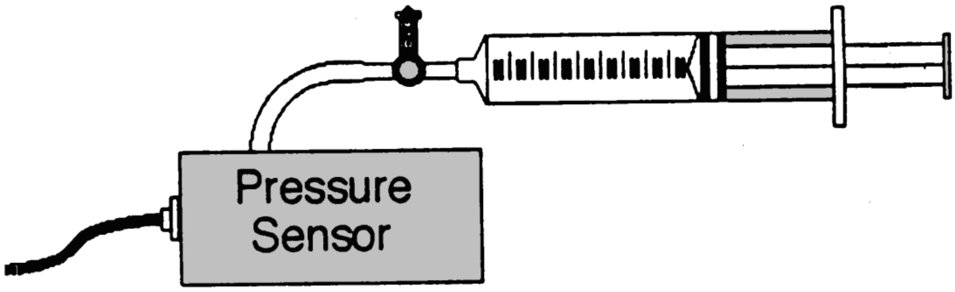


	A frekvens	B rørlængde
◆		
1	200	402
2	250	318
3	300	260
4	400	190
5	500	149

Et *resonansrør* er indrettet med forskydeligt stempel. Tabellen viser for forskellige frekvenser f (målt i Hz) den mindste afstand L mellem stemplet og rørets ende (målt i mm), for hvilken der er en resonans ved den pågældende frekvens. Her ses **data** for forsøget.

Undersøg om grafen kan fittes med en ligesidet hyperbel og kommenter modellen!

Eksempel 4: Boyle-Mariottes lov



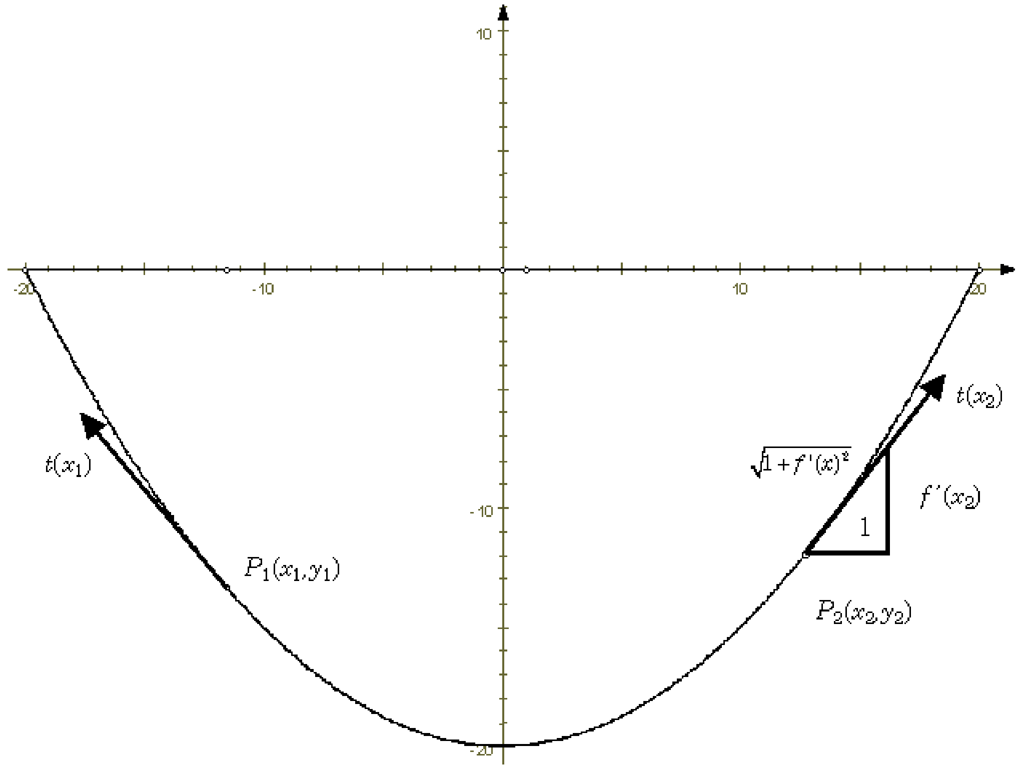
	A v_data	B p_data
◆		
1	6	2.67
2	8	2.28
3	10	2.
4	12	1.78
5	14	1.59
6	16	1.45
7	18	1.34
8	20	1.23

	A vp_data
◆	=v_data*p_data
1	16.02
2	18.24
3	20.
4	21.36
5	22.26
6	23.2
7	24.12
8	24.6

Ved et simpelt forsøg med en sprøjte og en elektronisk trykmåler måles sammenhørende værdier af rumfang (i cm^3) og tryk (i atm), idet sprøjten systematisk trykkes ind til de valgte rumfang; Ved forsøget fremkom følgende data, hvor vi har tilføjet listen med produkterne af rumfanget v og trykket p. Som det ses tydeligt er produktet af rumfang og tryk *ikke* konstant, men vokser jævnt hen gennem datasættet. Vi ser derfor at data ikke kan beskrives som en simpel omvendt proportionalitet.

Undersøg om grafen kan fittes med en ligesidet hyperbel og kommenter modellen!

Kædelinjen



I denne øvelse vil vi undersøge *formen* for en kæde, der hænges op i to punkter. Vi benytter derfor en *kuglekæde*, som vi formentlig kender bedst fra proppen i badekarret. I et konkret eksperiment fandt man følgende data:

x	-20	-18	-16	-14	-12	-10	-8	-6	-4	-2
y	0	-10.5	-19.0	-25.0	-30.5	-33.7	-36.4	-37.3	-39.4	-40.3

0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
-40.4	-40.0	-39.1	-37.6	-35.5	-32.3	-28.7	-23.5	-17.5	-9.7	0

Undersøg nu de følgende modeller for formen af kædelinjen:

1) En parabel model, dvs. grafen for et symmetrisk andengradspolynomium.
2) Grafen for et symmetrisk fjerdegradspolynomium.
3) Grafen for en hyperbolsk cosinus på formen: $y = a \cdot \cosh(\frac{x}{a}) + c$

Hvilken af de ovenstående modeller passer bedst med de empiriske data?

3. Øvelser i Statistik

Elementære opgaver i beskrivende (deskriptiv) statistik

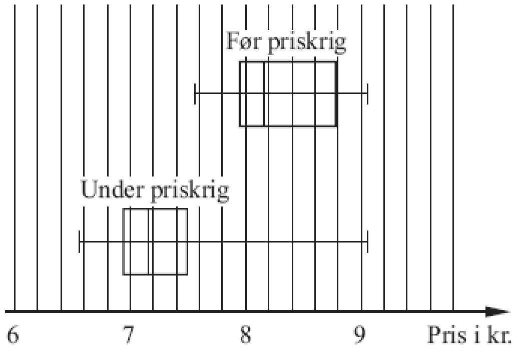
Opgave 6 En forbrugergruppe har indsamlet priserne på en bestemt vare i områdets 15 forretninger. Priserne var:

7,55 kr., 7,95 kr., 7,95 kr., 7,95 kr., 7,98 kr., 7,98 kr., 8,05 kr., 8,15 kr., 8,25 kr., 8,55 kr., 8,55 kr., 8,75 kr., 8,95 kr., 8,95 kr. og 9,05 kr.

a) Bestem middeltal og median for de 15 priser.

Senere under en priskrig indsamlede forbrugergruppen igen priserne i de 15 forretninger. Resultaterne af de to undersøgelser fremgår af boksplottene på nedenstående figur.

Bilag vedlagt



b) Gør rede for de virkninger af priskrigen, som man kan aflæse af denne figur.

4.005 B For en bestemt gruppe på 15 læger blev det undersøgt, hvor ofte de havde udført et kirurgisk indgreb, der medførte fjernelse af livmoderen. Antallet af sådanne operative indgreb var for hver af de 15 læger henholdsvis:

27 50 33 25 86 25 85 31 37 44 20 36 59 34 28

En tilsvarende undersøgelse blev foretaget i en gruppe på 10 kvindelige læger, og antallet af sådanne operative indgreb, som de havde udført var:

19 7 14 25 5 33 29 18 31 10

a) Lav på samme figur boksplot af hver af de to datasæt.

b) Kommentér undersøgelsen gennem en sammenligning af de to boksplot.

Opgave 15:

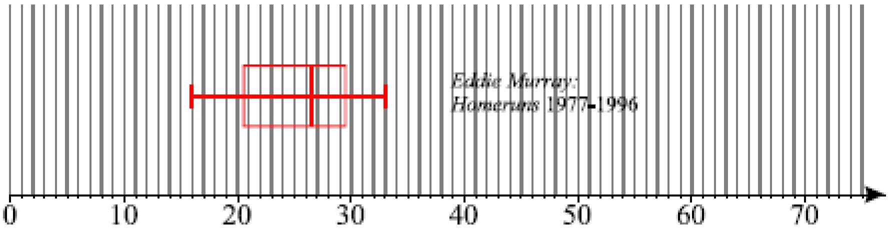
Vægt (gram)	41-43	43-45	45-47	47-49	49-51	51-53	53-55	55-57	57-59
Procent	3	7	12	17	18	19	15	7	2

Ovenstående tabel viser fordelingen (i procent) af vægten, målt i gram, af nogle forsøgsmus ved begyndelsen af et eksperiment.

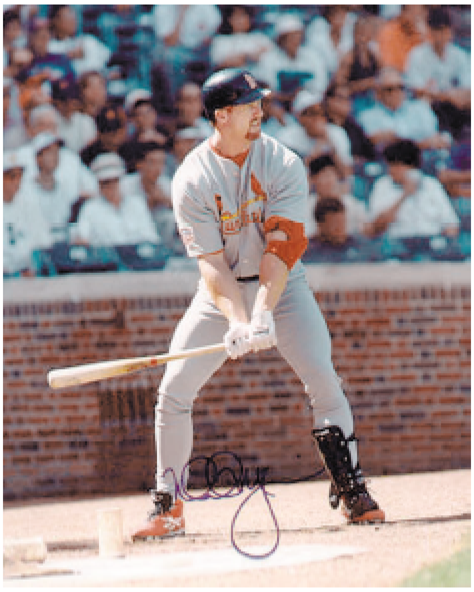
a) Tegn en sumkurve, og bestem kvartilsættet.

Opgave 9 I baseball skal en spiller slå til en bold og løbe så langt som muligt, indtil bolden er tilbage i "basen". Hvis en spiller derved når hele banen rundt, kaldes det et *homerun*. Eddie Murray (kaldet "Steady Eddie") er en tidligere professionel amerikansk baseball-spiller. Antallet af homeruns pr. sæson for Eddie Murray fra 1977 til 1996 kan beskrives ved følgende boksplot:

Bilag vedlagt



Fotoet viser Mark McGwire (kaldet "Big Mac"), en anden tidligere professionel amerikansk baseballspiller.



Antallet af homeruns pr. sæson for Mark McGwire fra 1986 til 2001 fremgår af nedenstående tabel:

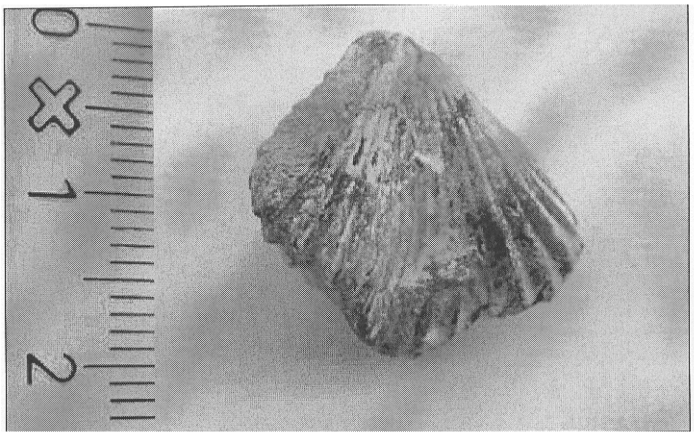
År	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Antal homeruns	3	49	32	33	39	22	42	9	9	39	52	58	70	65	32	29

a) Bestem nedre kvartil, median og øvre kvartil for antal homeruns pr. sæson for Eddie Murray.
Bestem nedre kvartil, median og øvre kvartil for antal homeruns pr. sæson for Mark McGwire.

b) Tegn (gerne på bilaget) et boksplot over fordelingen af antal homeruns pr. sæson for Mark McGwire.
Sammenlign de to boksplot.

Kilde: www.baseball-reference.com

Opgave 13



Brakiopoder er små muslingelignende skaldyr, der udgør den længstlevende dyreart. De findes i havet ud for New Zealand i store mængder.

Længde (mm)	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22	22-24	24-26	26-28
Antal	4	5	5	12	19	26	34	13	3

Tabellen viser fordelingen af længden af skallerne fra døde brakiopoder fra en stikprøve hentet op fra havbunden i Paterson Inlet. Det oplyses at den korteste skal har længden 10.0 mm, mens den længste skal har længden 26.4 mm.

a) Tegn sumkurven og bestem kvartilsættet.

Kvartilsættet for længden af levende brakiopoder fra den tilsvarende stikprøve er 9.7 mm, 16.6 mm og 21.6 mm. Den korteste skal blandt de levende brakiopoder havde længden 3.3 mm, mens den længste skal blandt de levende brakiopoder havde længden 25.1 mm.

b) Benyt de to kvartilsæt til på samme figur at lave to boksplot for længden af skaller stammende fra døde henholdsvis levende brakiopoder. Kommentér forskellen.

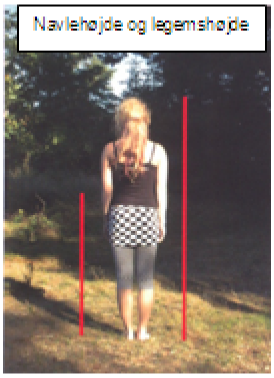
Eksempler på projektopgaver i statistik:

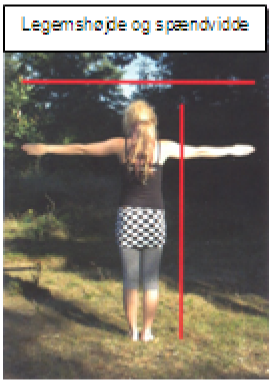
Øvelse – Deskriptiv analyse af kroppens proportioner

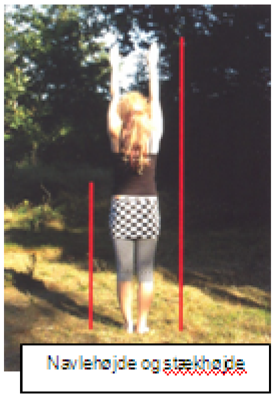
	A legemshøjde	B spændvidde	C navlehøjde	D strækhøjde	E livvidde	F halsomkreds	G håndledsomkreds	H vægt	I køn
◆									
1	180	184	112	231	81	32.8	17	70	Dreng
2	161	161.5	101	209.5	67	29.1	16.1	50	Dreng
3	168	178	100	213.2	74	34.4	16.9	59	Dreng
4	165	168.5	100	210	81.5	33	15.2	60	Pige
5	184	177.5	108.5	234	81.5	35.5	16	80	Dreng
6	184.5	180.5	112	229	70.5	33.5	15.5	70	Dreng
7	178	179.5	107	224	74	33.6	17	60	Dreng
8	177.5	178.3	110	226	84	35	16.5	67	Pige
9	174.8	170.5	105	218	80.8	33	15.5	65	Pige
10	184.2	176.5	112	229	83	35	18	82	Dreng
11	180.3	179.5	105.5	224	77.5	36.5	17.5	71.5	Dreng
12	189	188	115	235	80	36	17.5	72	Dreng
13	191	185	115	230	75	33	17.2	70	Dreng
14	172	171	104	215.5	78.6	30.5	15.1	60	Pige
15	170.4	166.7	106	212	73	31.5	15.7	62	Pige
16	170	168.5	107	216	70	35	16.5	59	Pige
17	165	162	105	206	68	30	14.6	52	Pige
18	186	177.5	111	230.5	74	34	17	68	Dreng
19	175	163.7	108	212	78.7	33.8	17	72	Pige
20	175.2	167.4	109	218	80.7	34.1	16.7	65.5	Pige
21	168	168	106	213	76	34.5	15.5	55	Pige
22	179.3	179.5	107.4	225	85	36	17.2	72	Dreng
23	165.7	165.6	102.5	211	76.7	32.6	14.8	58	Pige
24	172.8	166.2	103.7	213.2	87.1	33.5	15.9	65	Pige
25									
26									

A **legemshøjde**

	Legemshøjde	Spændvidde	Navlehøjde	Stækhøjde	Livvidde	Halsomkreds	Vægt
Målinger							







Del 1: Deskriptiv analyse af legemshøjde
Denne del laves i hånden uden anvendelse af TI-NSpire :o(

- Bestem middeltal
- Lav hyppigheds og frekvenstabel
- Lav et prikdiagram
- Bestem minimum og maksimum
- Bestem kvartil-sættet (Q1, Q2, Q3)
- Lav et boksplot
- Bestem kvartilspredningen (Q3 – Q1)
- Lav et stolpediagram
- Kommenter/diskuter hver enkelt deskriptor

Del 2: Deskriptiv analyse af spændvidde
Denne del må gerne laves i TI-NSpire :o)

- Lav et prikdiagram og et stolpediagram (vælg **Histogram** og lav søjlerne smallere ved at trække i en søjlernes kanter)
- Bestem middeltal, minimum, maksimum og kvartil-sæt
- Bestem kvartilspredningen (Q3 – Q1)
- Kommenter/diskuter hver enkelt deskriptor

Del 3: Usikkerheder
Overvej/diskuter usikkerheder ved jeres målinger – kom med eksempler på faktorer der influerer målingernes validitet/pålidelighed.

Del 4: To variabel undersøgelse
Hypotese: Legemshøjde er lig spændvidde!

- Hvem har blandt andet opstillet ovenstående hypotese?
- Bestem den lineære sammenhæng mellem Legemshøjde og spændvidde ved regression i TI-NSpire (vælg **Mindste kvadraters linie**)
- Opstil andre hypoteser med udgangspunkt i jeres målinger.

Nedenstående er uafhængig af vores data

Del 5: Middeltal i forhold til median

- Giv et eksempel data hvor middeltallet svarer til medianen.
- Giv et eksempel data hvor middeltallet er mindre end medianen.
- Giv et eksempel data hvor middeltallet er større end medianen.

Del 6: Kvartil bestemmelse

Hvordan bestemmes kvartilsættet i TI-NSpire.
Sammenlign med den udleverede teori.
Tag eventuelt udgangspunkt i følgende observationer:

	A data_8	B data_9	C data_10	D data_11
◆				
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9		9	9	9
10			10	10
11				11

Måling af reaktionstider:

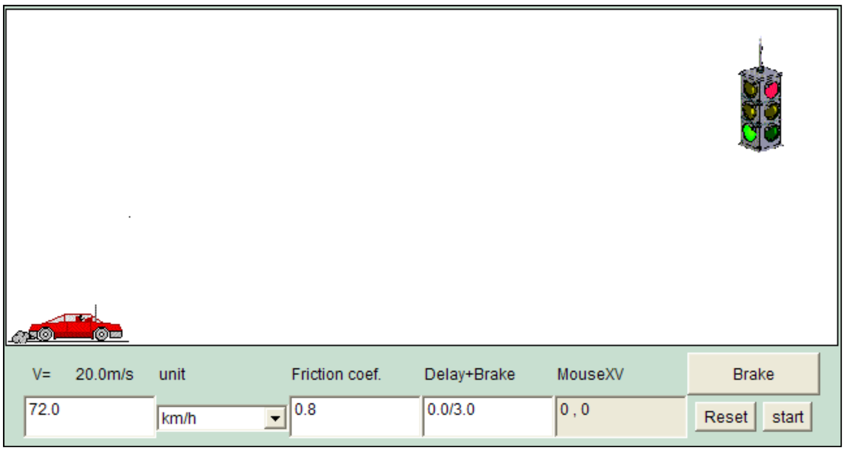
For at kunne måle en reaktionstid i praksis går vi ind på Google og søger på **NTNUJAVA.** Så ryger I hurtigt ind på hjemmesiden

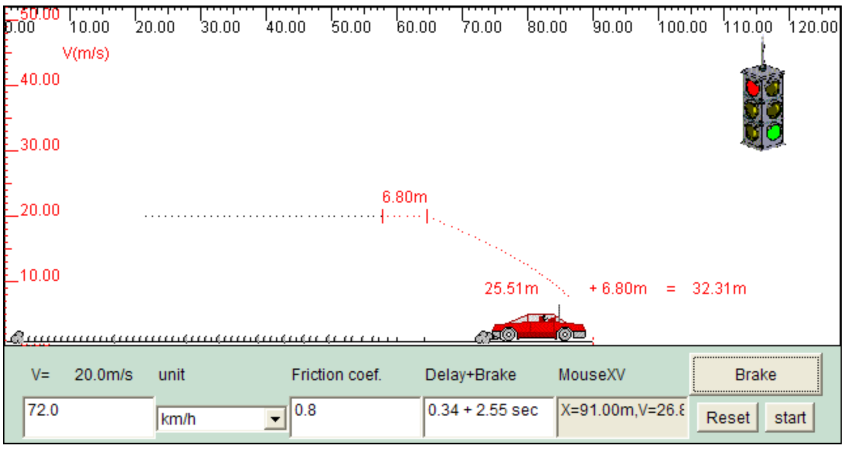
http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/

for **Virtual Physics Laboratory**. Her vælger I området **Kinematics** og eksperimentet **Reaction Time Measurement.**
Der åbnes da for et eksperiment hvor man bl.a. kan måle reaktionstiden. Ideen er at man skal sætte bilen i bevægelse og vente på det bliver rødt. Man trykker da så hurtigt som muligt på bremsen og ser hvor hurtigt man har reageret – og hvor langt bilen når at køre imens. I første runde får I hjælp idet stoplyset første gang skifter til gult. Det er en prøverunde, så den tæller ikke med i den endelige databehandling!

Hver elev udfører ti målinger af reaktionstider og den tilhørende reaktionslængde. Alle data samles i en fælles tabel med de tre variable: Reaktionstid, Reaktionslængde og Navn.

Hvad er et fornuftigt mål for den enkelte elevs reaktionstid? Hvem er den hurtigste elev i klassen? Hvilken sammenhæng er der mellem reaktionstid og reaktionslængde?

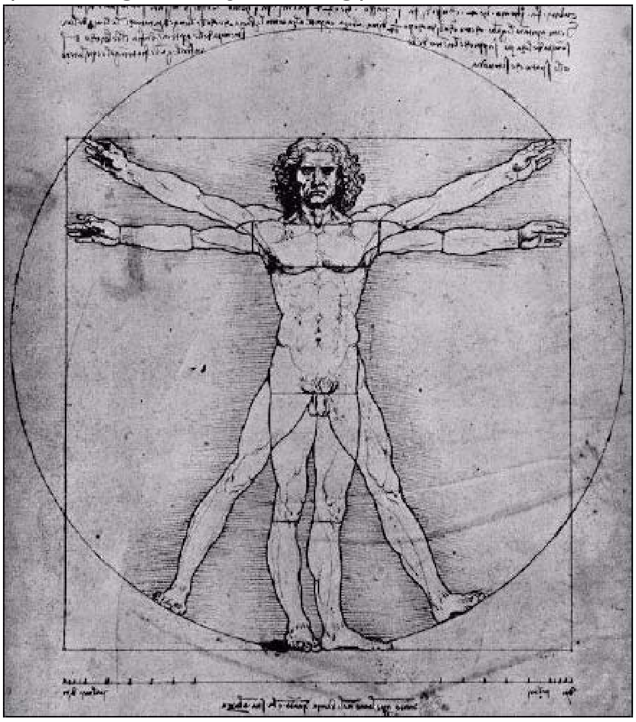




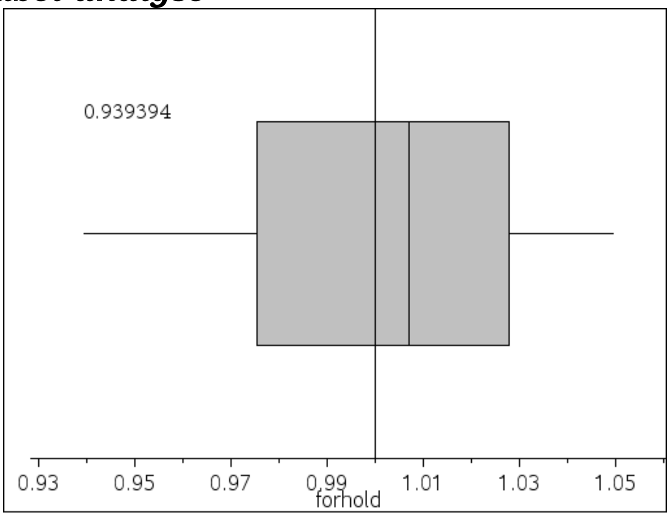
(Kig gerne på de vedlagte sample data).

Da Vincis hypoteser om menneskets proportioner

(Uddrag af vejledning)



Deskriptiv statistik – dobbelt variabel analyse

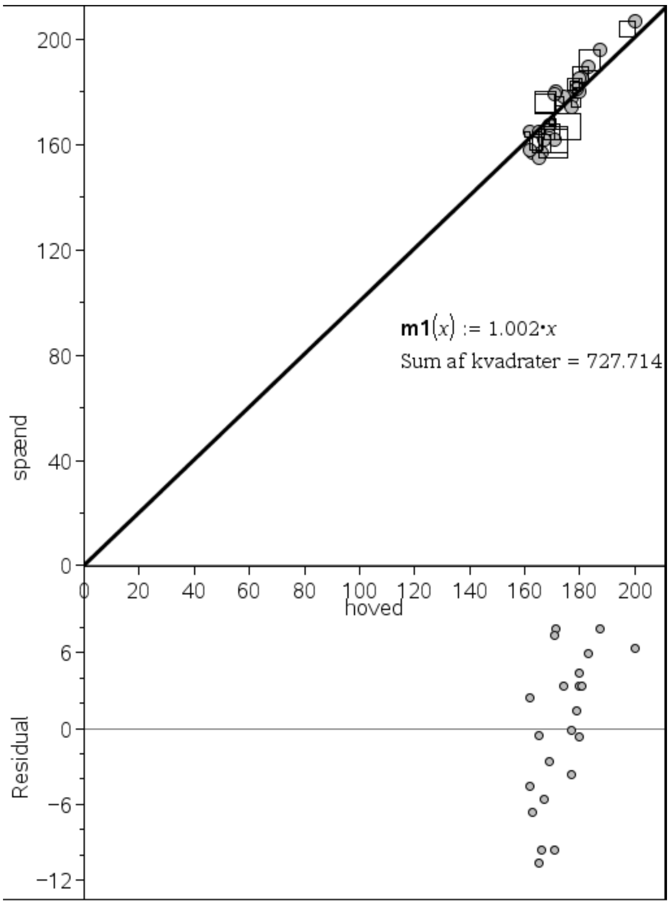


Her beskrives og analyseres den sammenhængende fordeling for to variable: **Spændvidden** og **legemshøjden**. Det er nærliggende at kigge på forholdet mellem de to variable i lyset af hypotesen om ligefrem proportionalitet. En forventning om at spændvidden er lig legemshøjden svarer til en forventning om at forholdet (**Spændvidde/Legemshøjde**) er lig 1. Dette forhold er et dimensionsløst tal, da begge variable har samme enhed.

Medianen for forholdet er 1.007 og middeltallet er 1.00237. Første kvartil er lig 0.9753 og 3. kvartil er lig 1.0278, hvormed kvartilspredningen er 0.0525. Det mindste observerede forhold er 0,95 og det største er 1,0337. Dermed ligger det forventede forhold på 1 inden for kvartilboksen.

Undersøgelse af hypotese

For at undersøge sammenhænge mellem de to variable, er målingerne afbilledet som punkter i et koordinatsystem med legemshøjde på *x*-aksen og spændvidde på *y*-aksen. På grund af en forventning om ligefrem proportionalitet mellem de to variable låses skæringen til 0 ved hjælp af en **flytbar linje**. Ved at vise residuelle kvadrater og residualplot hørende til den flytbare linje kan linjen justeres til summen af kvadraterne er mindst mulig. Den rette linje, der fremkommer, er den linie som bedst beskriver punkternes beliggenhed når linien samtidig skal gå gennem (0,0).



Ligningen for linien bestemmes som

$$\textbf{Spænd} = 1.002 \cdot \textbf{Hoved}$$

hvor **Spænd** er udtryk for spændvidden og **Hoved** er udtryk for legemshøjden (begge mål i centimeter).
Vælges som vist menupunktet **vis residualplot** kan man se, at der ikke er nogen tydelig systematik i restdataene for proportionalmodellen. Tilføjes **vis residualkvadrater** ses ydermere at summen af kvadrater er lig 727 for proportionalmodellen.

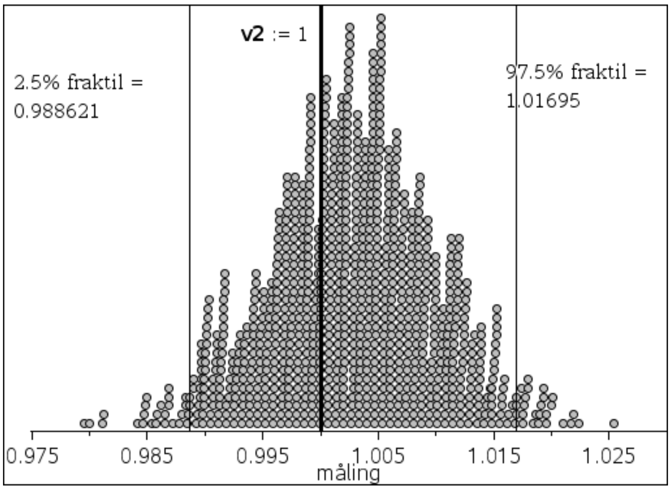
Bootstrap – test af hypotese

Igen kan man dog fundere over, hvorvidt den "sande værdi" for middelforholdet ligger en anelse over 1, eller om vi kan forklare det som en tilfældig fluktuation i de pågældende målinger. Vi opstiller dermed følgende 0-hypotese

H_0: Spændvidden divideret med legemshøjde er lig 1

Hypotesen svarer til påstanden om ligefrem proportionalitet, hvor *Spændvidde* er lig med *Legemshøjde*. Vi vil undersøge om denne hypotese kan forkastes – altså om hypotesen er falsk. Metoden vi anvender til denne hypotesetest kaldes **bootstrapping**3.
Vi antager, at målingerne er repræsentative for en langt større population af elever spredt ud over landet. Dermed kan vi konstruere en tilnærmelse til denne population ved at gentage vores egne målinger rigtig mange gange: Hvis vi f.eks. gentager hver af målingerne 1.000 gange, har vi en population på 21.000 elever, hvoraf de første 1.000 ligner den første elev på holdet, de næste 1.000 ligner den anden elev osv.

Trækker vi så en tilfældig stikprøve fra denne "superpopulation", vil alle elever i praksis have lige store chancer for at blive udtrukket. Det svarer til at b**oot-strappe** holdet, dvs. til at trække en stikprøve på 21 elever **med gentagelse** og **tilbagelægning**. Hver gang vi har trukket en elev, lægger vi altså vedkommende tilbage igen, så der stadigvæk er samme chance for at trække denne elev næste gang. Ved at lave gentagne målinger på **bootstrappet** kan vi nu finde fordelingen for middelforholdet for 1.000 tilfældige hold.



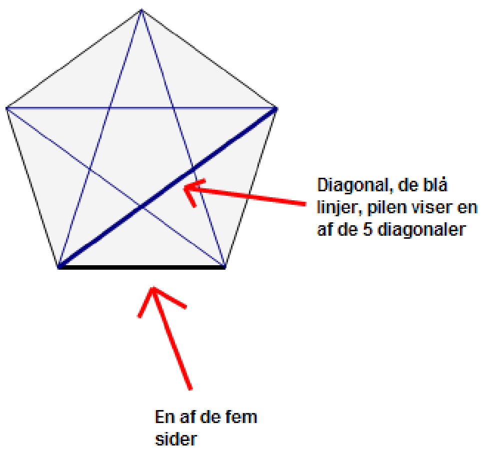
Vi ser da, at den forventede værdi 1 ligger forholdsvis langt inde i fordelingen. Usikkerhedsintervallet for middelforholdet ligger mellem 2,5%-fraktilen og 97,5%-fraktilen og dermed givet ved: [0,9886; 1,01695]. Det rummer den forventede værdi på 1 og vores hypotese er derfor ikke i modstrid med data. Vi kan altså ikke forkaste hypotesen og sige at den er falsk!

(Uddrag af elevrapport)
Da Vinci har mange teorier om menneskets opbygning, altså han mener der er en sammenhæng mellem bestemte ting. Han har fem teorier og den 6 har vi fundet, for hvis han teorier er rigtige må den 6 vi har fundet også være rigtig, men de 6 teorier er:

$H_1 = \dfrac{spændhøjde}{hovedhøjde} = 1$ (dette er konstanten, dette burde gælde for hver person, undtagelsen kan være små børn og gamle mennesker der er ved at krybe sig sammen).

$H_2 = \dfrac{strækhøjde}{navlehøjde} = 2$ (det vil sige at i hver menneske med nogle få undtagelser burde give 2 hvis man dividerede deres strækhøjde med navlehøjde.)

$H_3 = \dfrac{navlehøjde}{hovedhøjde} = \phi(0.6180)$ dette er det lille gyldne snit. Det gyldne snit som betegnes som det guddommelige forhold er et irrationalt tal, som nogle gange dukker op i naturen. Indenfor betegnes matematikken det med græsk bogstav Φ (phi). En af de personer der forskede i det gyldne snit var Da Vinci, han forsøgte at vise, at det gyldne snit ligger i mennesket proportioner. Han prøvede



sig frem og en af hans versioner er den vitruvianske mand, der viser den menneskelige proportioner. Der er ingen der helt præcis kan svare hvorfor at navlehøjde divideret med hovedhøjden giver det gyldnesnit, så det er derfor stadig en gåde som ikke er blevet løst og som ingen har præcise svar på.

Det gyldne snit er simpelthen side/diagonal, det skal dog nævnes at denne formel kun gælder for en femkant.

$H_4 = \frac{strækhøjde}{spændhøjde} = 2 \bullet \text{det}\, gyldnesnit(1,3)$ denne formel er en vi har fundet i klassen.

Hvis Da Vincis teorier er rigtig må denne teori også være rigtig. Hvis vi sætter en formel op vil vi nå frem til at denne formel i stor sigt må give to gange det gyldne snit.

$H_5 = \frac{knæhæjde}{hovedhøjde} = \frac{3}{4}$ her siges at forholdet mellem de to er konstant og er derfor ¾.

$H_6 = \frac{håndhøjde}{hovedhøjde} = \frac{1}{9}$ her er forholdet mellem håndhøjden og hovedhøjden 1/9. Det

Rapportkrav:
Ved opmåling i klassen fik hver elev tildelt en af da Vincis hypoteser og skulle derefter diskutere den først med metoder fra den beskrivende statistik og derefter med metoder fra den bekræftende statistik.

Der er vedlagt sample data!

Undersøg nu sammenhængen mellem **knælhøjden**, dvs. den højde man har når man knæler fx for at få et ridderslag, og **hovedhøjden**.

Er det rigtigt som da Vinci påstår, at knælhøjden er ¾ af hovedhøjden?

Aktivitet: Hvem er den hurtigste?

- **Formål og Hypotese**
  I denne aktivitet skal I måle jeres reaktionstid. Det sker ved hjælp af en træ-lineal med længden ½ meter.

- **Teori**

Teori: Ifølge Galileis faldlov, en hjørnesten i den klassiske naturvidenskab, er sammenhængen mellem faldlængden *s* og faldtiden *t* givet ved formlen

$$s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

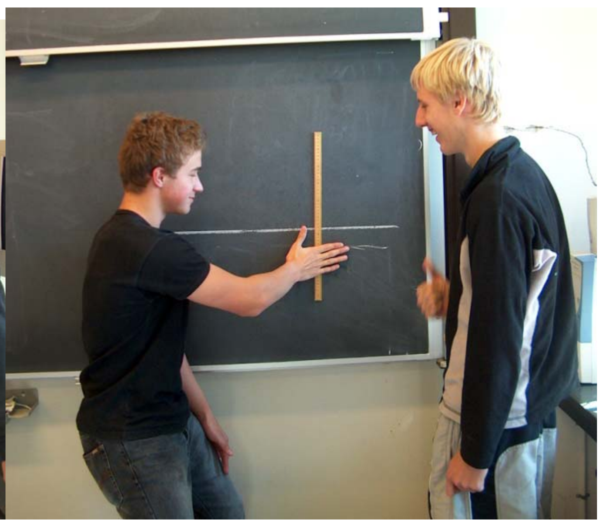
hvor *g* er tyngdeaccelerationen, som i Haslev er 9.82 m/s^2.
Vi kan derfor omsætte faldlængden til en faldtid, dvs. en reaktionstid, ved at vende formlen om:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{9.82}}$$

- **Materialer (vis gerne opstilling som indsatte tegninger)**
  Elever og trælineal

- **Fremgangsmåde**
  I skal arbejde sammen to og to, idet I skiftes til de følgende to roller:
  - En **udfordrer**, der skal slippe linealen på et overraskende tidspunkt.
  - En **forsvarer**, der skal have målt sin reaktionstid ved at stoppe linealen så hurtigt som muligt.

  Linealen holdes lodret op mod en væg, så skalaen vender med 0 cm-mærket nederst ud for en markering med en tynd streg på fx en tavle eller et papir, der er tapet fast til væggen. Udfordreren slipper linealen på et så overraskende tidspunkt som muligt og forsvareren prøver at stoppe den så hurtigt som muligt ved at slå en flad hånd vandret ind mod linealen, så den holdes fast på væggen. Derefter kan man aflæse på simpel vis, hvor langt linealen er faldet med 1 millimeters nøjagtighed.
  Forsvareren får ti forsøg, der noteres i det følgende skema, hvorefter I bytter rolle som udfordrer og forsvarer.

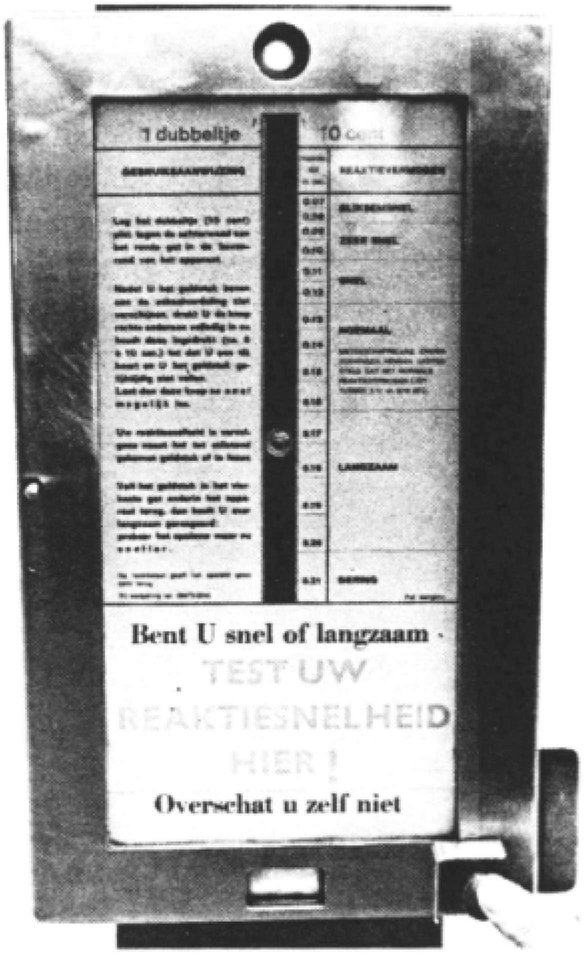



- **Dataanalyse, resultaterne gennemgås i forhold til hypotese og teori**

Forsøg nr.	Faldlængde i meter	Faldtid
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

- Indskriv de 10 faldlængder i en tabel i databehandlingsprogrammet **TI-Nspire CAS**.
- I den næste søjle udregner du reaktionstiden i sekunder ved at benytte den ovenstående formel. (Se TI-Nspire-noterne for hvordan man indtaster formler, tegner diagrammer osv.)
- Du skal udregne **middeltallet** og **medianen** for reaktionstiderne.
  Som et mål for din typiske reaktionstid vil vi bruge **medianen**, fordi den er robust dvs. ændres ikke af et enkelt fejlagtigt forsøg.
    - Den typiske reaktionstid = Medianen = _______________
- Hvem har den bedste reaktionstid? Hvem var så den hurtigste?
- Saml resultaterne for dit par i en enkelt tabel, så du kan tegne et **boks-plot** for begge serier af ti reaktionstider i det samme diagram.
- Hvor overbevisende er vinderen? Kunne det lige så godt tilskrives tilfældigheder, hvem af jer der har vundet?
- Når alle har fundet deres typiske reaktionstid tegnes der et **histogram** for årgangens samlede sæt af reaktionstider. Er der forskel på piger og drenge?
- Herunder følger en officiel hollandsk figur af en maskine, der kan udføre målingen af reaktionstiden automatisk. Hvordan virker maskinen? Hvor ligger du på maskinens skala for reaktionstider?

- **Fejlkilder**
- **Konklusion**



Reaktie-tijd in sec.	REAKTIE-VERMOGEN
0.07	BLIKSEMSNEL
0.08	
0.09	ZEER SNEL
0.10	
0.11	SNEL
0.12	
0.13	NORMAAL wetenschappelijke onderzoekingen hebben vastgesteld dat het normale reaktievermogen ligt tussen 0,12 en 0,18 sec.
0.14	
0.15	
0.16	
0.17	LANGZAAM
0.18	
0.19	
0.20	
0.21	GERING

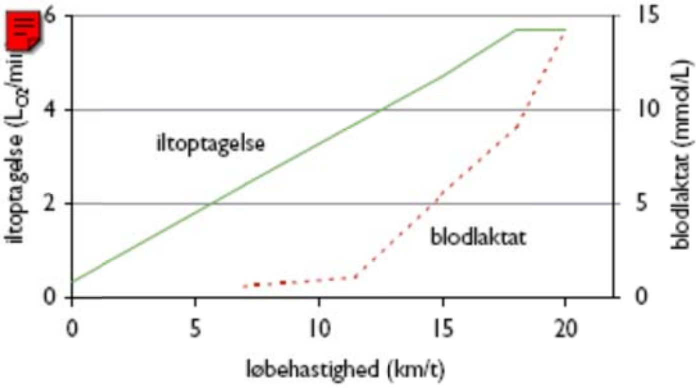
Aktivitet: Konditest

Hvad er kondition og fysisk form?
Vi kan vurdere vor kondition ved at sammenligne os med andre, men kan vi *kende* den præcist?

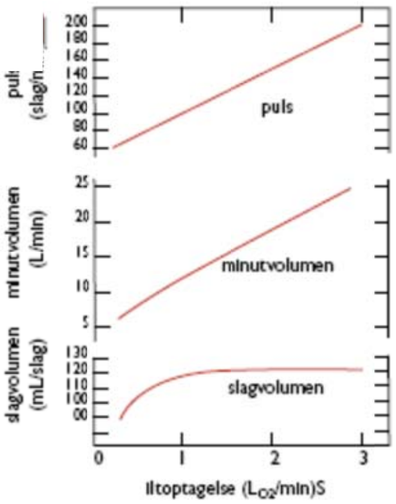
- **Indhold:**
  Del 1 – analyse af data fra tidligere årgange
  Del 2 – konditest og analyse af dette års resultater

- **Formål og Hypotese**
  Hvis vor kondition kan måles, får vi en værdi, vi kan:
  - forholde os til
  - sammenligne med
  - vurdere ud fra
  - handle ud fra (træne)

- **Teori**
  Sammenhængen mellem arbejdsbelastning og –intensitet, her løbehastighed, og pulsfrekvens er lineær proportional. Når løbehastigheden stiger øges vor iltoptagelse. Det viser denne figur. Det kender vi også fra at vi bliver forpustet, når vi anstrenger os. Det skyldes, at der er brug for mere ilt i de muskler der arbejder.



(Kilde: Idræt, teori og træning



Når vi måler på vor puls, ag i minuttet, får vi et mål på, hvor hårdt v arbejder.

Hjertet banker hurtigere r mere blod ud i kroppen.

Hjertet er en muskel, og d blive bedre til at pumpe blod. Det sker, nå ner. Musklerne bliver stærkere og det sam r med hjertet. Derfor er vor anstrengels tningen af kroppen, afhængigt af hvor tr r.

Kondital er et tal, som ud hvor meget ilt kroppen bruger under m belastning. Derfor udtrykker konditallet noget om vor træn and.

$$\text{Kondital} = \frac{\text{maksimalt iltoptag}}{\text{vægt}}\left(\frac{\text{ml } O_2/\text{min}}{\text{kg}}\right)$$

Vi kan måle vores kondition **direkte** eller **in**
Direkte ved at måle hvor meget ilt der er bru direkte ved at anvende en test, som har en ”oversættelse a uget.”
I denne aktivitet bruger vi ”***PENDULTESTEN*** r en indirekte målemetode, fordi vi ikke måler på iltoptage n på hvor mange pendultesttrin, der er løbet. Trinene er u kondition, se tabel sidst i aktiviteten.

- **Fremgangsmåde**

Del 1 – Analyse af data fra tidligere årgange (kan ud s før konditest)

Alle årgange har de sidste 5 år i 1.g deltaget i en kon forbindelse med NVG. Konditesten gennemførtes som en pendultest (se **angsmåde**). Man skal sørge for komme på tværs af hallen indenfor et be srum. Ved hvert nyt trin har hver testpersonerne kortere tid til at kom tværs af hallen. Dvs. at man skal sætte hastigheden op hver gang et n tarter. Hvert trin varer ca. 1 min. Nedenstående data stammer fra en så

Pulsfordelingen for en dreng i 1e 2005:

	A trin	B puls
◆		
1	2	170
2	3	172
3	4	174
4	5	177
5	6	179
6	7	182
7	8	186
8	9	189
9	10	191
10	11	194
11	12	197
12	13	199
13	14	202
14	15	204

Lav en tabel med følgende data i TI-Nspire:

<u>Spørgsmål:</u>

a) Bestem elevens kondital og kommentér det (jfr. tabellerne side 39-40).
b) Afbild pulsdata grafisk, idet *løbetrinet* afsættes ud af x-aksen (den uafhængige variabel) og *pulsen* afbildes op af y-aksen (den afhængige variabel). Beskriv pulskurven. Gør rede for, at elevens puls med god tilnærmelse vokser lineært fra trin 2 til trin 15 ved hjælp af lineær regression i TI-Nspire (**mindste kvadraters linje**).
c) Angiv formlen for den lineære sammenhæng mellem trin og puls.
d) Bestem pulsen når eleven er halvvejs gennem trin 6.
e) Ved hvilket trin er pulsen 160 slag/min.

Del 2 – Konditest og analyse af dette års resultater

"*Pendultesten*" foregår ved

- o at man løber frem og tilbage imellem to linier (20 m).
- o at du løber, når du hører et signal.
- o at du holder den løbehastighed som signalerne angiver.

Der er en kort introduktion til testen, når du er i hallen.

***Vigtigt*:**

1. *Alle* skal udføre konditesten.
2. Du må *ikke* stoppe op under testen.
3. Du skal notere det trin, du har *gennemført*. Via tabellen aflæser du dit kondital.
4. Via computer beregnes dit kondital.
5. Via pulsur registreres pulsen for enkelte elever på hvert hold. Lærerne overfører data til computeren.

- **Materialer**

Pulsure og computer til indlæsning af data
Idrætstøj
Løbesko/sportssko
Blyant

Resultater (skemaer mv)

1. Dit resultat indskrives i en fælles database (**Ti-Nspire**).
2. Noter data som: klasse, alder, køn m.m. se skema sidst.
3. Pulsurene aflæses af lærerne og data lægges ind i databasen, som siden kan findes på T-drev.

- **Dataanalyse, resultaterne gennemgås i forhold til hypotese og teori**

1. **Sammenlign og vurder dit kondital med tabelværdier for kondital.**
2. **Beregn klassens gennemsnit**
3. **Beregn det gennemsnitlige kondital for de to køn. Sammenlign de to køns kondital og beskriv forskelle evt. ligheder.**
4. **Beregn det gennemsnitlige kondital for alle klasser.**
5. **Afbild pulsresultaterne grafisk, idet pulsen afbildes op ad *y*-aksen og trinene ud af *x*-aksen.**
6. **Beskriv en af pulskurverne.**
7. **Afbild individuelle resultater fra to trænede personer og fra to mindre trænede. Kommentér graferne!**

- **Datafremlæggelse:**

1. Indfør dine resultater i et samlet resultatskema.
2. Overvej hvorledes man grafisk kan vise de gennemsnitlige kondital, så sammenligninger kan foretages visuelt.
3. Graferne af puls målingerne printes ud fra **TI-Nspire** eller sættes ”pænt op” i et **Word** dokument.

- **Konklusion**

1. **Giv en forklaring på resultaterne**

2. Opstil nogle simple hypoteser/teorier på baggrund af de fundne resultater.

- **Tabel til vurdering af kondital**

Kvinder:

Alder	Lavt	Under middel	Middel	Over middel	Højt
Under 20	Under 35	36-40	41-48	49-53	Over 53
20-29	Under 34	34-37	38-41	42-47	Over 47
30-39	Under 31	31-36	37-41	42-46	Over 46
40-49	Under 29	29-33	34-38	39-43	Over 43
50-59	Under 28	28-30	31-34	35-38	Over 38
60-69	Under 26	26-30	31-33	34-38	Over 38

Mænd:

Alder	Lavt	Under middel	Middel	Over mid-del	Højt
Under 20	Under 40	41-44	45-50	51-55	Over 56
20-29	Under 34	34-38	39-43	44-49	Over 49
30-39	Under 33	33-36	37-40	41-46	Over 46
40-49	Under 30	30-33	34-37	38-43	Over 43
50-59	Under 29	29-31	32-34	35-39	Over 39
60-69	Under 26	26-28	29-31	32-36	Over 36

Tabel, der viser sammenhæng mellem løbe-trin, hastighed og kondital.

Trin	Hastig-hed	Tid pr. 20 m	Løbe-tid	Kondi-tal
	Km/time	Sekunder	Minuttal	ML/KG/MIN
1	8,0	9,0		
2	9,0	8,0	2	29,2
3	9,5	7,579	3	32,1
4	10,0	7,2	4	35,0
5	10,5	6,858	5	37,9
6	11,0	6,545	6	40,8
7	11,5	6,261	7	43,7
8	12,0	6,000	8	46,7
9	12,5	5,760	9	49,6
10	13,0	5,538	10	52,5
11	13,5	5,333	11	55,4
12	14,0	5,143	12	59,3
13	14,5	4,966	13	61,3
14	15,0	4,800	14	64,2
15	15,5	4,645	15	67,1
16	16,0	4,500	16	70,0
17	16,5	4,364	17	72,9
18	17,0	4,235	18	75,8
19	17,5	4,114	19	78,8
20	18,0	4,000	20	81,7