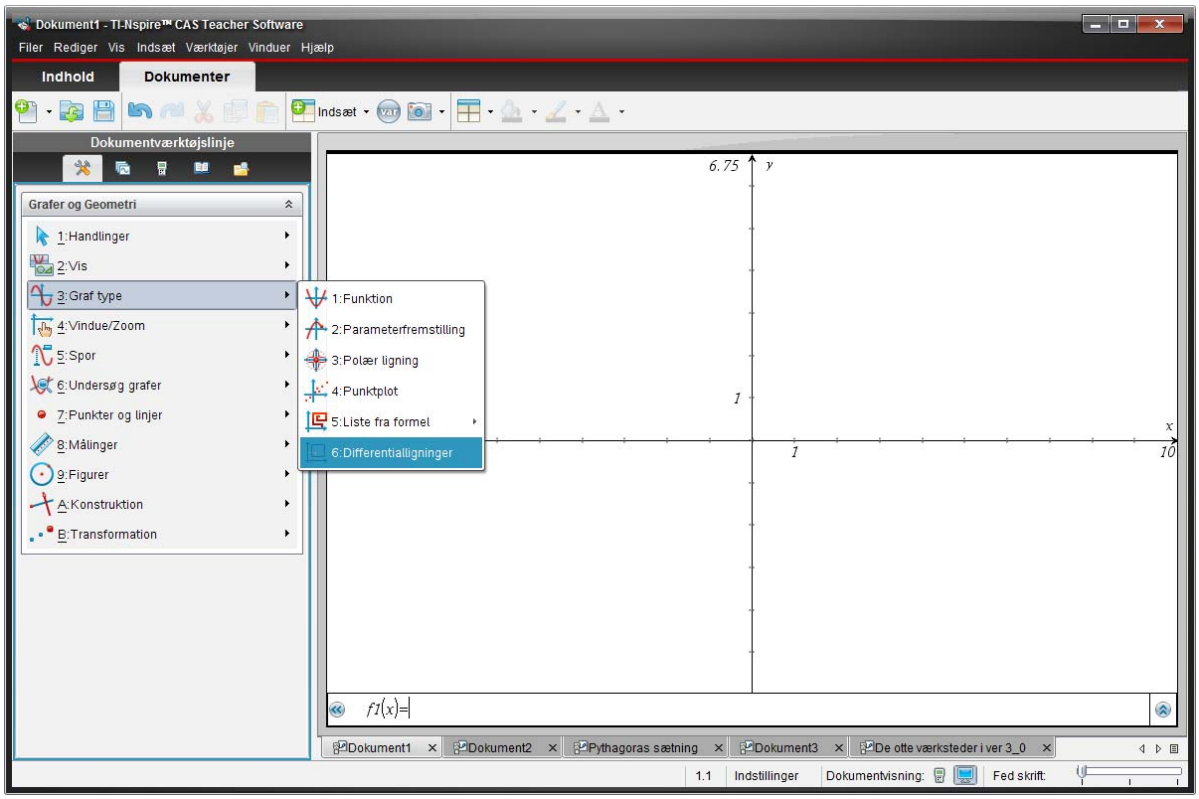
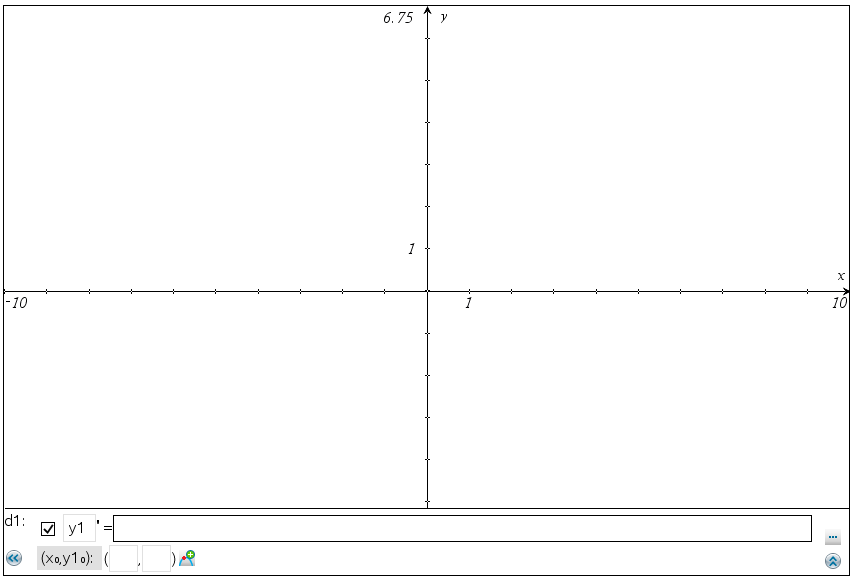
Differentialligninger med TI-Nspire CAS version 3.1



Der er tilføjet en ny graftype til **Graf**-værkstedet kaldet **Diff lign**. Denne nye graftype er en implementering af differentialligningerne som vi kender dem fra TI-89.

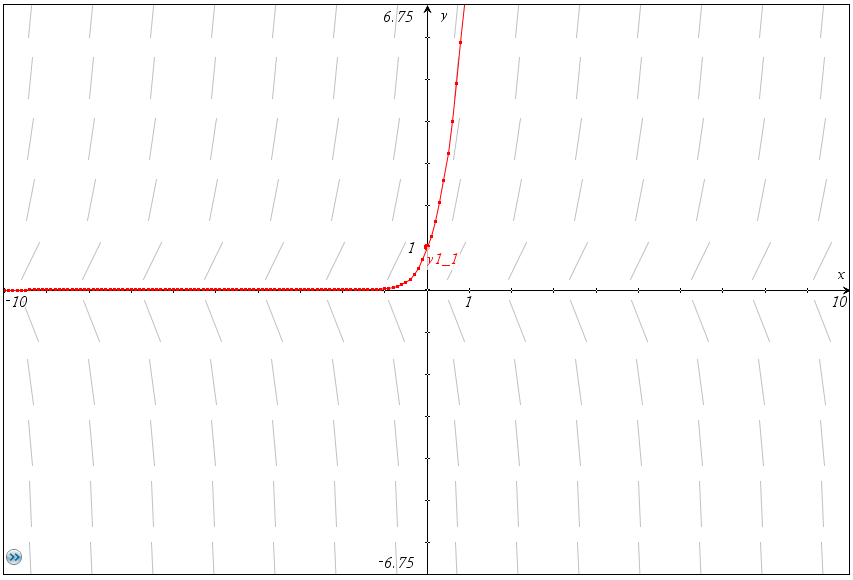


I indtastningslinjen kan man nu indsætte en differentialligning på formen y1' = udtryk i x og y1, fx

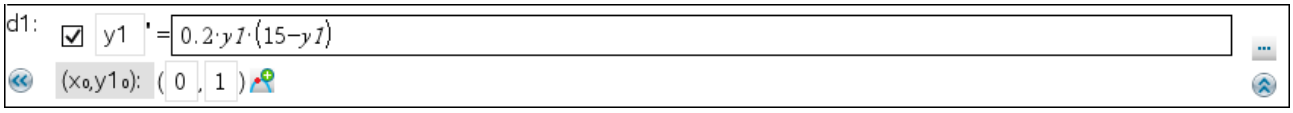
$$y1' = 0.2 \cdot y1(5-y1)$$

for en logistisk differentialligning. Navnet for den afhængige variabel y1 kan vælges frit. Men den uafhængige variabel **skal** hedde x. Hvis man arbejder med flere differentialligninger kan de også sagtens være koblede. Der kan arbejdes med et vilkårligt antal koblede differentialligninger. Læg mærke til at der kun kan arbejdes med systemer af førsteordens differentialligninger. Hvis man vil lege med anden ordens differentialligninger skal de altså først omskrives til et system af første ordens differentialligninger.

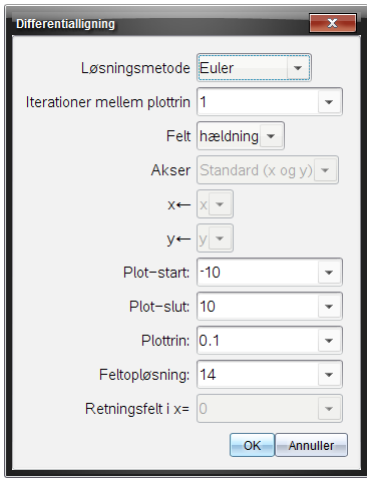
Når man har indsat begyndelsespunktet tegnes grafen som et punkt plot, idet der udregnes en numerisk liste af punkter på grafen. Man kan da skifte til et linjeplot ved at vælge attributter.



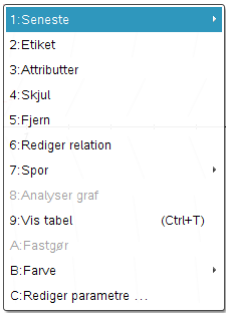
Man kan gribe i startpunktet (skift evt. attribut for at gøre det tydeligere) og trække det rundt. Så man kan se hvordan løsningen afhænger af startpunktet. Hvis man vil lege med mere end et startpunkt af gangen kan man klikke på ikonet (lige ved siden af startpunktet) og indsætte op til fire uafhængige startpunkter.



Man kan også gå ind i indstillinger for differentialligninger ved at klikke på ikonet helt ude til højre eller ved at højreklikke på grafen og vælge det sidste menupunkt: **Redigér parametre**. Der åbnes da for en indstillings-menu for differentialligninger:

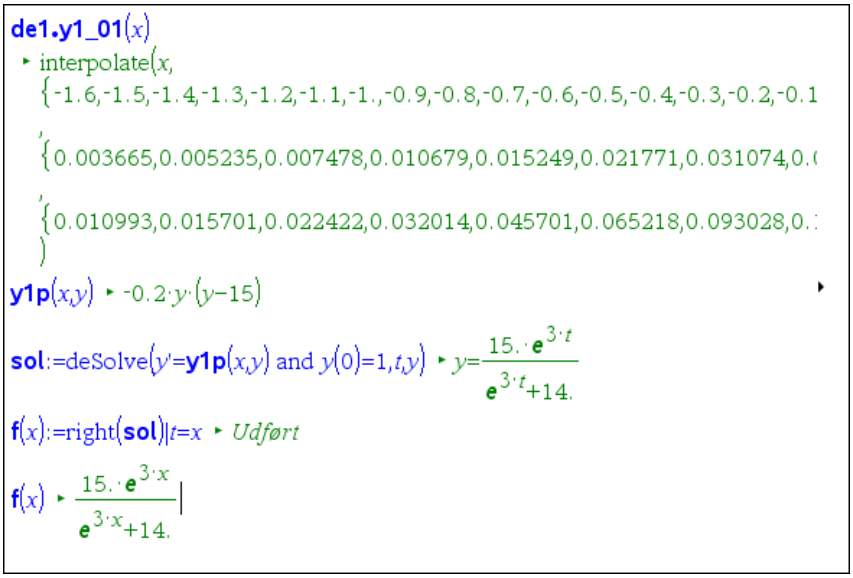


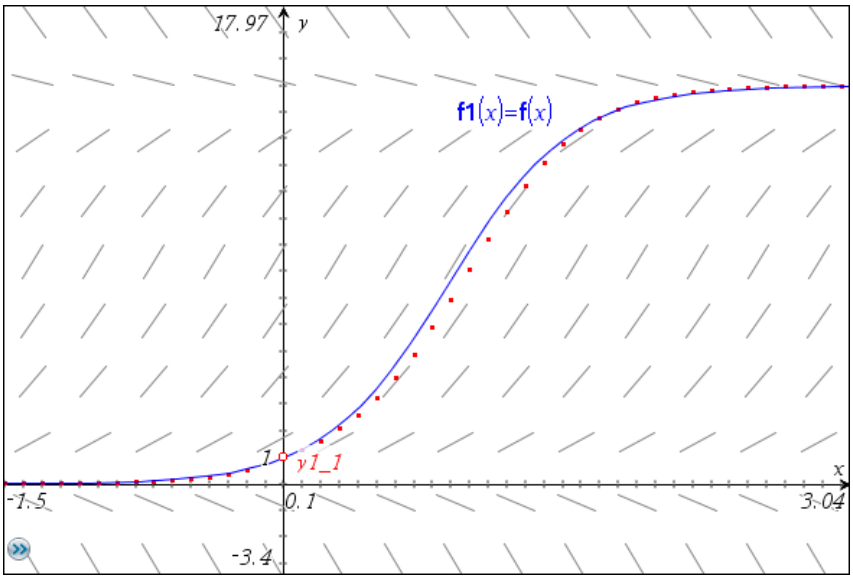
Løsningsmetode: Der kan vælges mellem Euler og Runge-Kutta-metode. Eulermetoden er nem at forklare, men Runge Kutta metoden er meget mere præcis.
Iterationer mellem plottrin: Man kan sætte antallet af beregnede punkter op, men stadigvæk kun nøjes med at afbilde med faste mellemrum.
Felt: Der kan vælges mellem hældning (linjeelement) og retning (vektor). Slås hældning fra, kan man skifte til brugerdefinerede akser!
Akser: Vælges brugerdefinerede akser kan man selv kontrollere hvilke variable, der afsættes ud af akserne. Det er en stor styrke ved fx koblede differentialligninger. Men akseindstillingen slår igennem på **alle** differentialligningsvinduer i samme opgave!
Feltopløsning: Bestemmer antal linjeelementer i vandret retning.
Retningsfelt i x =: Hvis differentialligningen ikke er autonom, dvs. afhænger af x, kan man se linjefeltet til et bestemt tidspunkt x.



Hvis man højreklikker på differentialligningen har man som det ses forskellige muligheder for oplysninger om grafen:
Rediger relation: Hvis man vil rette i forskriften for differentialligningen.
Spor: Man kan spore grafen og få oplyst koordinaterne løbende. Trykkes ENTER fastfryses koordinaterne til grafen.
Vis tabel (Ctrl T): Viser en tabel over den numeriske løsning. Tabellen slås fra igen ved endnu et klik på **CTRL T** (mens man er i grafrummet). Når man har løst differentialligningen numerisk/grafisk er den til rådighed både som numeriske lister og som funktionsudtryk.

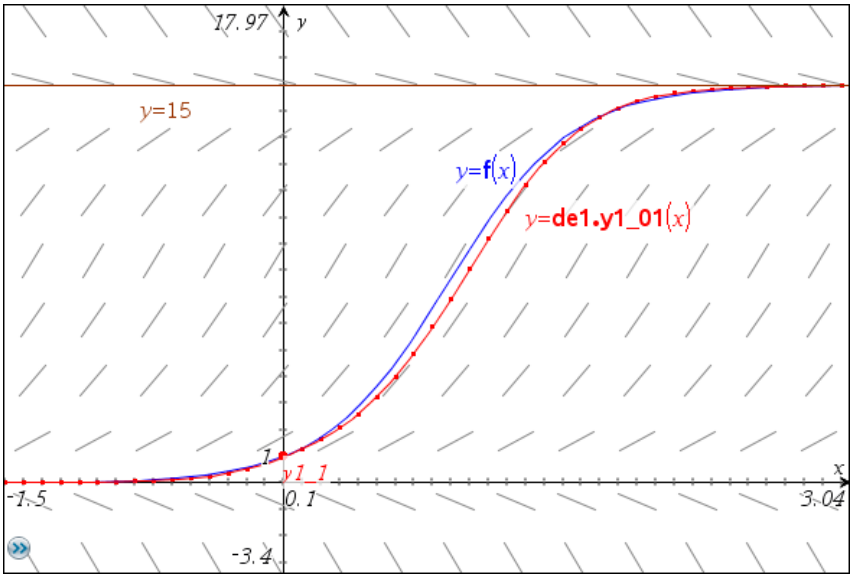
Selve differentialligningen er gemt i funktionen **y1p** (hvor p står for prime, dvs. mærke). Løsningen er gemt som **de1.y1_01** (hvilket man kan finde i variabellisten eller ved at skrive **de1.** (jfr. **stat.**)).



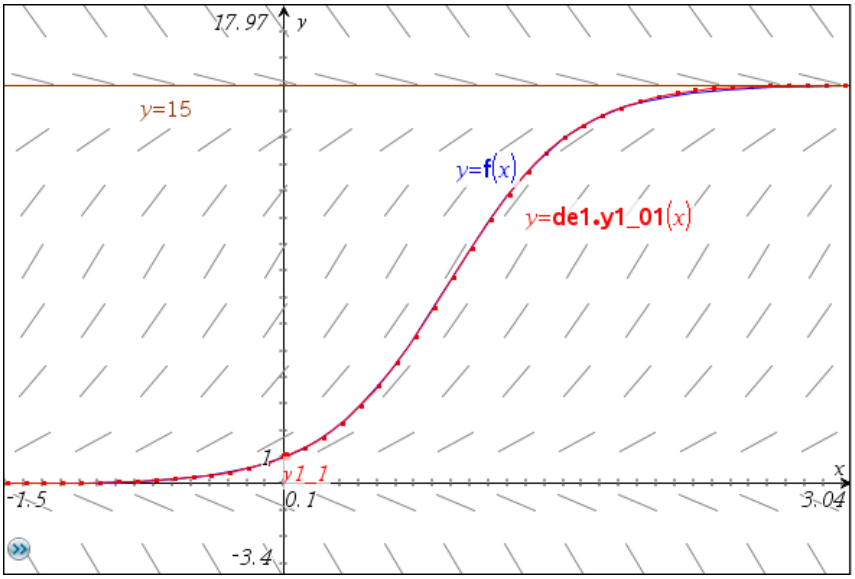


Man kan som vist benytte dette til at foretage en sammenligning mellem den numeriske løsning og den eksakte løsning (der fås frem ved at anvende desolve-kommandoen). Læg mærke til at den numerisk grafiske løsning er bundet til de aktuelle vinduesgrænser, dvs. den er kun defineret indenfor det *x*-interval, der rent faktisk kan ses i vinduet. Læg også mærke til løsningsfunktionen er defineret ud fra en interpolation af den numeriske liste frembragt ved Eulers eller Runge Kuttas metode. Interpolate-kommandoen tager tre argumenter: Først listen over x-værdierne (som er en ækvidistant serie af tal), dernæst listen over de beregnede y-værdier og endelig listen over tangenthældningerne (der fås direkte ud fra differentialligningen, der netop udtrykker hældningen ud fra x-værdien og y-værdien). Der er tale om en kubisk interpolation, dvs. i hvert delinterval mellem to på hinanden følgende x-værdier, følger den numeriske løsningsfunktion det entydigt bestemte tredjegradspolynomium, der har de samme y-værdier og de samme tangenthældninger i intervalendepunkterne.

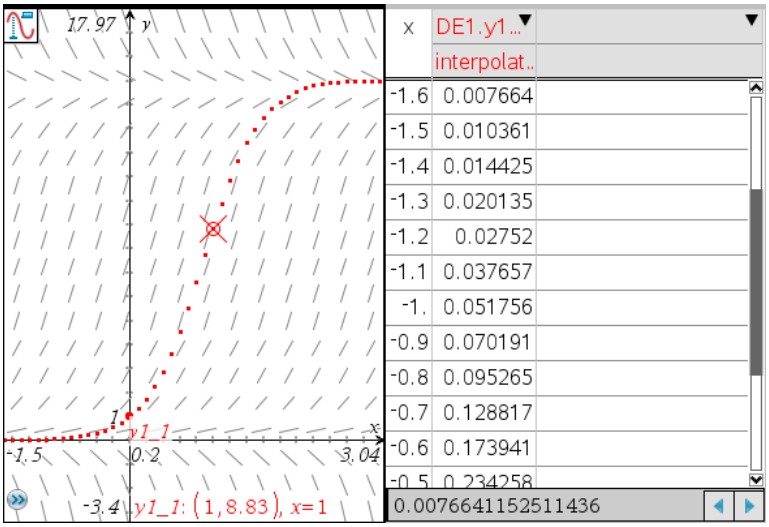
Når vi har løst differentialligningen numerisk grafisk har vi altså adgang til løsningsfunktionen som en funktion, hvilket gør at vi kan tegne grafer for forskellige kombinationer af variable efter eget valg svarende til de brugerdefinerede koordinatsystemer i differentialligninger. Det sikrer også at vi kan anvende simple geometriske konstruktioner, da vi nu ikke længere er bundet til at repræsentere løsningen som et punktplot. Her har vi kopieret grafværkstedet ind på en ny side og skiftet til almindeligt funktionsplot, og plottet såvel den symbolske løsning, som den interpolerede numerisk/grafiske løsningsfunktion.



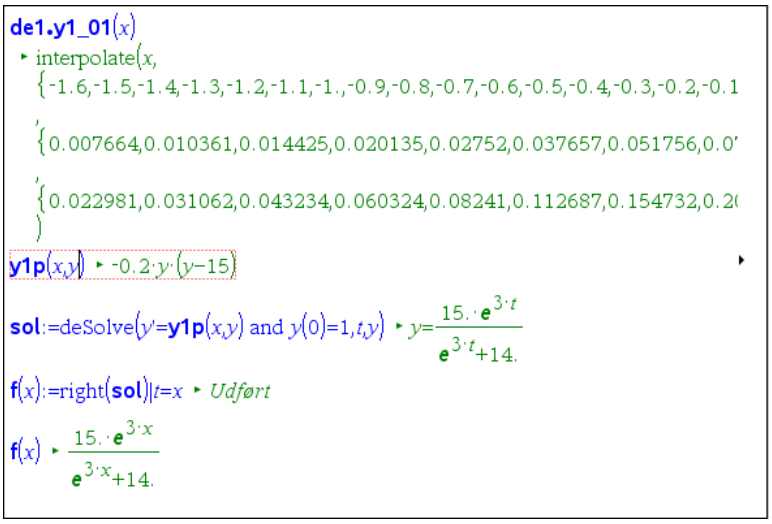
Overensstemmelsen er ikke prangende, men det skyldes jo netop at vi har anvendt en Euler-metode i løsningen. Skifter vi til RK-metoden bliver det straks svært at skelne.



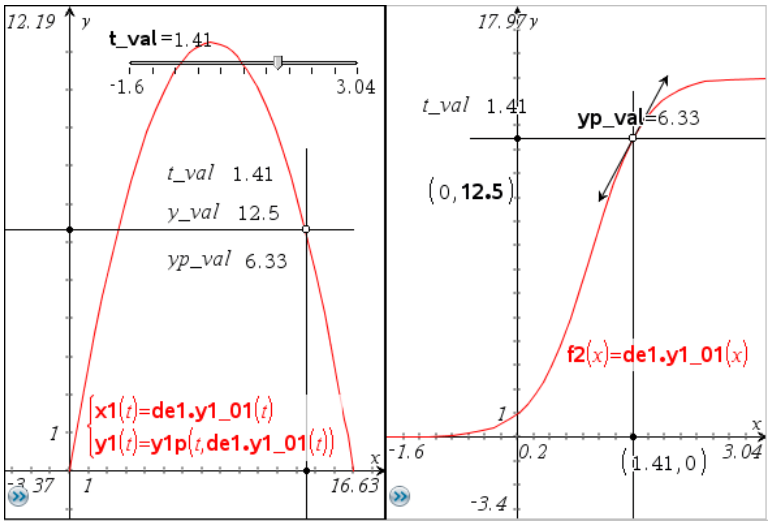
Punktplottet for den numerisk/grafiske løsning kan spores ligesom vi kan oprette en tabel over den numerisk/grafiske løsning ved hjælp af CTRL T (eller højreklik i grafrummet).



Tabellen er dog fremkommet på basis af funktionsudtrykket og skal derfor tilpasses de x-værdier, der ligger til grund for punktplottet. De derved fremkomne resultater stemmer overens med interpolationsudtrykket (hvor vi nu har skiftet til Runge-Kutta metoden).



Vi konstruerer endelig et faseplot for differentialligningen, dvs. vi afsætter tangenthældningen y' som funktion af y. Det kan vi selvfølgelig oprette direkte på baggrund af differentialligningen, men vi opretter det i stedet som grafen for en parameterfremstilling, hvilket gør det muligt at koble løsningsgrafen direkte til faseplottet. Vi afsætter altså løsningsfunktionen y1 ud af x-aksen og den afledede y' op af y-aksen.



For at forstærke sammenhængen mellem de to grafer har vi indført en skyder **t_val**, som vi overfører til x-aksen i højre løsningsrum. Ved hjælp af passende vinkelrette og skæringer kan vi nu følge grafen i højre løsningsrum, herunder aflæse såvel y-værdi **y_val** som y'-værdi **yp-val** (repræsenteret ved tangentens hældning). Disse to værdier kan derefter lagres og overføres til det venstre grafrum. Her kan vi så igen ved hjælp af passende vinkelrette og skæringer konstruere det tilhørende grafpunkt i venstre grafrum. Trækker vi i skyderen kan vi derfor se hvordan løsningspunktet i højre grafrum afspejles på det tilhørende faseplat i det venstre grafrum. Hver for sig kan vi selvfølgelig spore de to grafer, men ved at inddrage skyderen kan vi sammenkoble de to sporinger og der i gennem understrege ækvivalensen af de to repræsentationer.

Romeo og Julie (et studie i ulykkelig kærlighed)

Første akt. De elskende plages af en manglende tilpasning af deres gensidige følelser overfor hinanden.

Romeo (kølig): "Min kærlighed til Julie falder i takt med hendes følelser for mig!"

Julie (varmblodet): "Min kærlighed til Romeo vokser i takt med hans følelser for mig!"

Vi lader *x* repræsentere Romeo's følelser for Julie og *y* repræsentere Julies følelser for Romeo. Tiden måles i dage (0-60), og deres følelser måles på en skala fra -5 til 5, hvor 0 er ligegyldighed:

Følelse	Hysterisk had	Begyndende afsky	Ligegyldighed	Spirende forelskelse	Ekstatisk kærlighed
Værdi	-5	-2.5	0	2.5	5

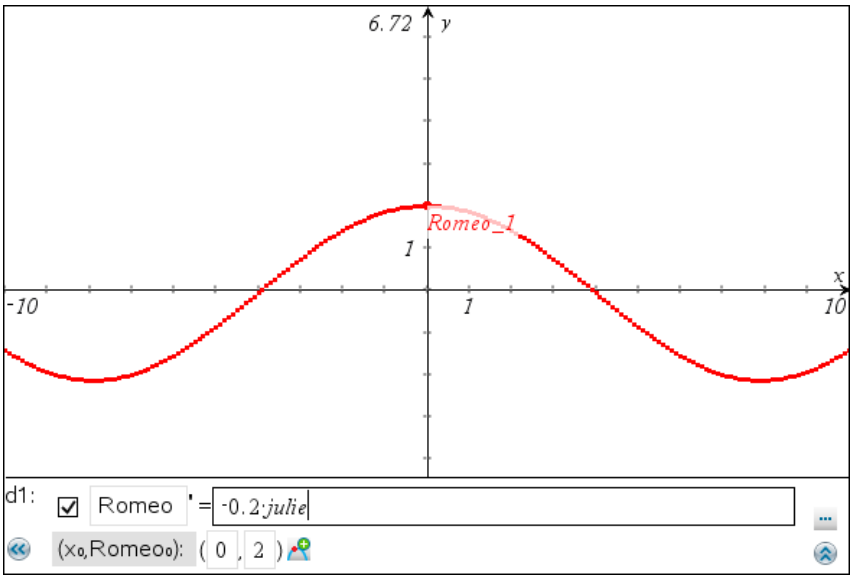
Ligningerne til modellen for deres kærlighedsaffære ser således ud

$$\frac{dx}{dt} = -0.2 \cdot y$$
$$\frac{dy}{dt} = 0.8 \cdot x$$

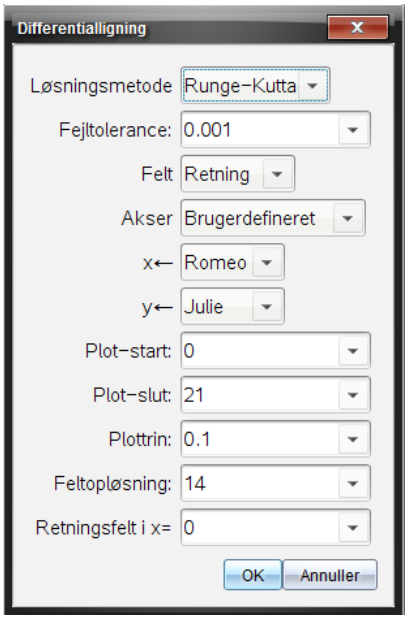
Vi antager nu, at Romeo ser Julie for første gang til tidspunktet $t = 0$, og at han straks bliver tiltrukket af hende (dvs. $x(0) = 2$). Julie derimod er naturligvis i første omgang ligeglad ($y(0) = 0$), men situationen er selvfølgelig ustabil! Vi opretter et differentialligningsværksted og indsætter de to differentialligninger idet vi udnytter at vi kan omdøbe de uafhængige variable:

1:Romeo ' =-0.2*julie
2:Julie ' =0.8*romeo

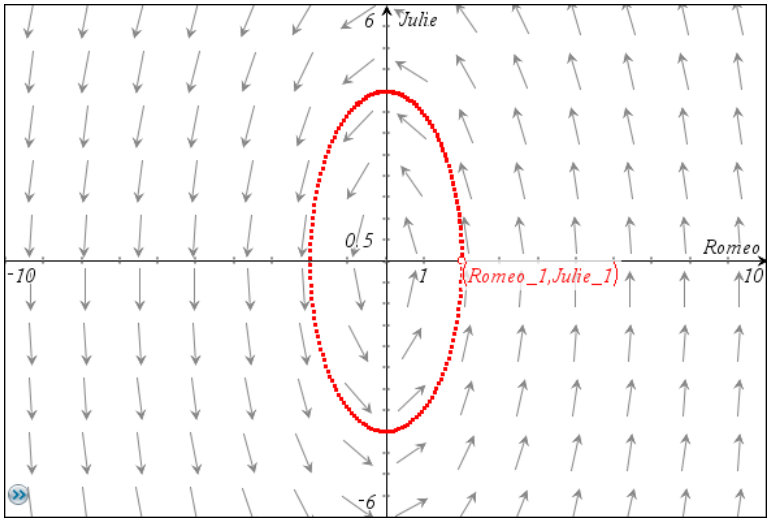
I første omgang får vi kun en almindelig graf for Romeo at se (den kan kun vise en løsningsgraf ad gangen, så vi skal slukke for Romeo for at få lov til at se grafen for Julie.



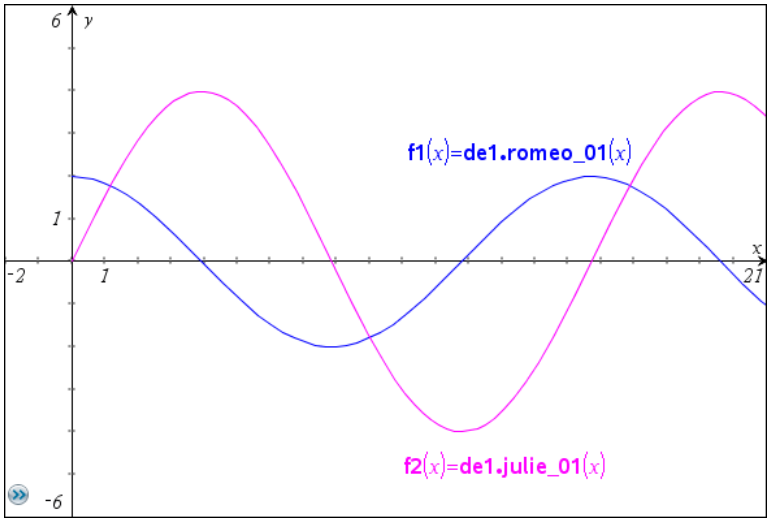
Men her kan vi jo skifte graftype til faseplot for Romeo og Julie, idet vi vælger et retningsfelt:



Læg mærke til at vi har skiftet løsningsmetode til Runge Kutta og at vi følger deres kærlighedsliv i 3 uger!

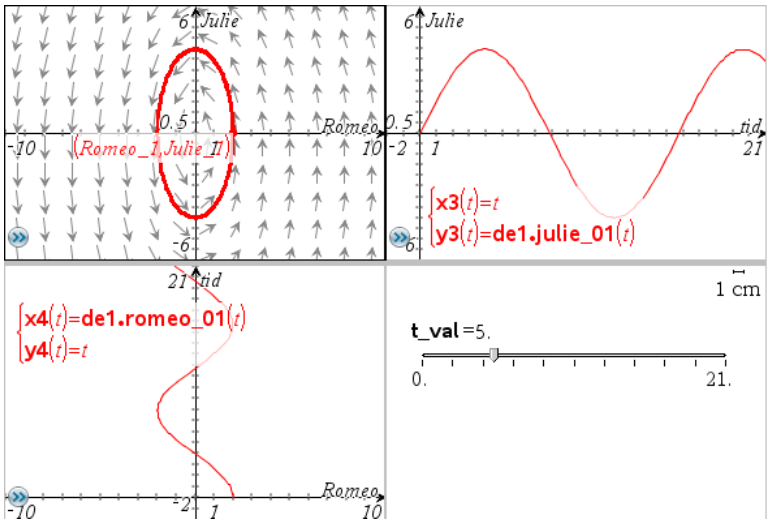


For så også at få vist tidsgraferne skifter vi graftype til almindelige funktioner og udnytter at vi nu kender de numerisk grafiske løsningsfunktioner:



Fortolkning: Julie oplever langt større følelsesmæssige udsving end Romeo. Hun begynder at blive svimmel på grund af sine følelsesmæssige rutsjeture og beslutter sig for at søge hjælp fra en studievejleder.

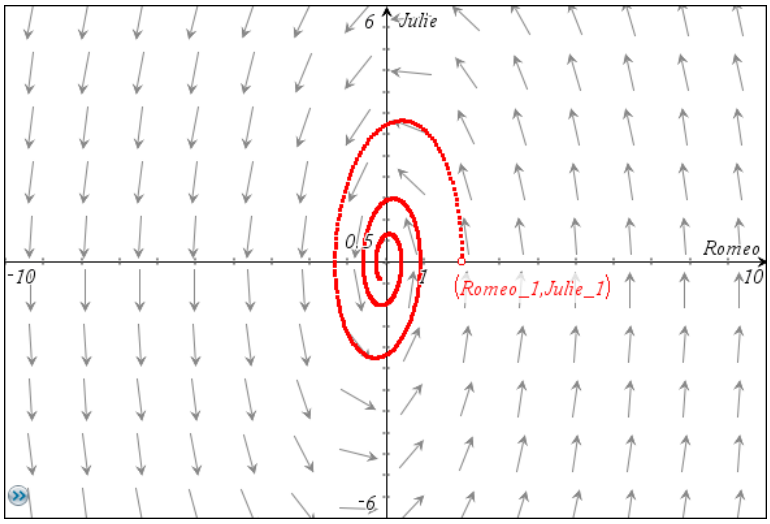
Bemærkning: Hvis vi skifter graftype til parameterfremstillinger kan vi kan endda sætte graferne ind på den samme side, så man kan se samspillet mellem de forskellige repræsentationer:

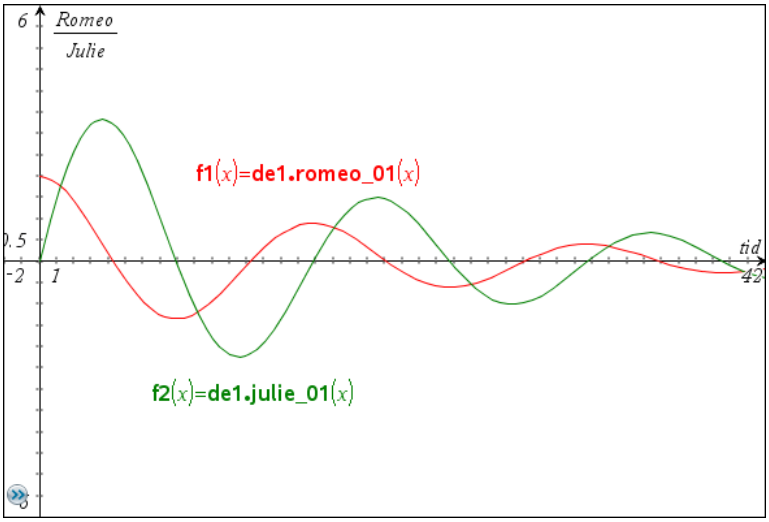


På en stor skærm kan vi endda indsætte en skyder og følge de tre løsningskurver synkront.

Anden akt: Julie er dybt påvirket af hendes kærlighedsaffære, hun distraheres nemt, begynder at ligge søvnløs om natten, og hun glemmer alt om sine lektier. Studievejlederen foreslår derfor at hun tager noget beroligende, der dæmper hendes følelsesmæssige reaktioner.
Den beroligende effekt inddrages i modellen ved at tilføje et nyt led i differentialligningen for Julies følelser for Romeo (dvs.-0.1y). Startværdierne og ligningen for Romeo's følelser antages at være de samme. De nye ligninger ser derfor således ud

$$\frac{dx}{dt} = -0.2 \cdot y$$
$$\frac{dy}{dt} = 0.8 \cdot x - 0.1 \cdot y$$





Fortolkning: De beroligende midler har en dæmpende virkning på hele kærlighedsaffæren.
Både Romeo og Julie er rystet over deres forsvindende forhold. De beslutter sig derfor for at søge en anden rådgivning.

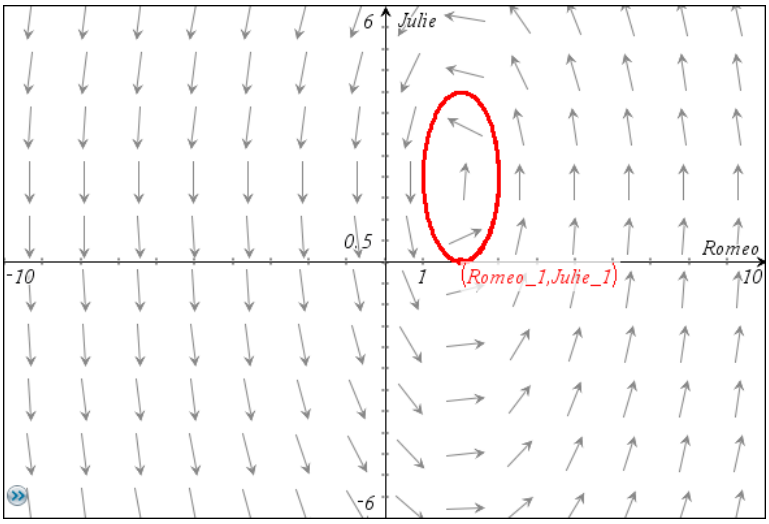
Tredje akt: Julie stopper med de beroligende midler og sammen søger hun og Romeo en ny rådgiver. De bliver begge sendt til behandling for at lære at ændre deres reaktionsmønstre overfor hinanden. Romeo lærer at acceptere Julies kærlighed, og nu begynder hans følelser derfor først at falde, hvis hun bliver alt for kærlig ($y > 2$):

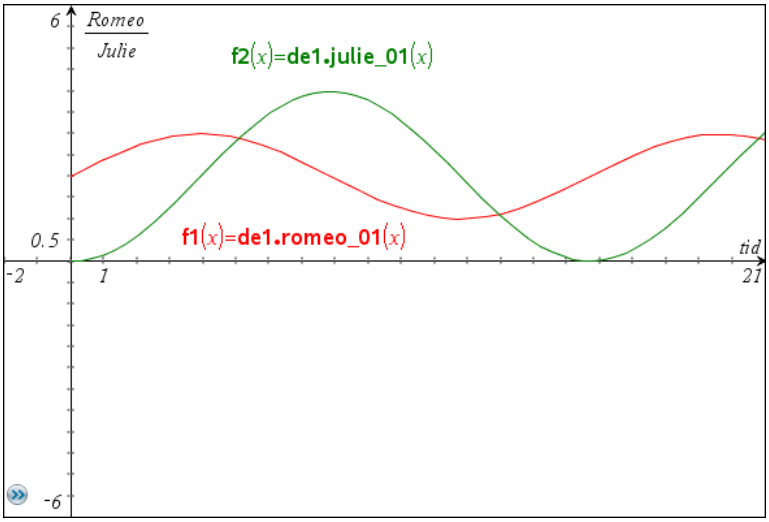
$$\frac{dx}{dt} = -0.2 \cdot (y - 2)$$

Julie lærer tilsvarende at styre sin reaktioner, hendes kærlighed vokser nu kun når Romeo bliver meget kælen ($x > 2$):

$$\frac{dy}{dt} = 0.8 \cdot (x - 2)$$

Tag nu udgangspunkt i de samme begyndelsesbetingelser $x(0) = 2$ og $y(0) = 0$.





Har de endelig fundet lykken?

Der er selvfølgelig mange muligheder for variationer!
Tilsvarende er der mulighed for at omskrive differentialligningssystemerne i de tre akter til førsteordens differentialligninger i *x* og *y*, henholdsvis anden ordens differentialligninger i *t* og *x* eller *t* og *y*. Det giver mulighed for at undersøge de analytiske løsninger for kærlighedsdramaet.

Øvelse 1: Opstil for hver af de tre akter de tilhørende førsteordens differentialligninger i *x* og *y* og find de eksakte ligninger for faseplotskurverne. Kontroller overensstemmelsen med de grafiske løsningskurver.

Øvelse 2: Opstil for hver af de tre akter de tilhørende andenordens differentialligninger i (*t*,*x*) henholdsvis (*t*,*y*) og find de eksakte ligninger for parameterkurverne.
Kontroller overensstemmelsen med de grafiske løsningskurver.