**Vektorer i 2D: Grundlæggende egenskaber**

Vektorerne tegnes i et **Grafer** værksted. I menuen **Vis** vælges **Gitterlinjer** og vælg desuden **Skjul akser**. Højre-klik i tegnefladen og **Indstillinger** for vindue via **Vindue/Zoom**. I dialogvinduet sættes **X-** og **Y-skala** til ”**1**” som vist herunder. Benyt herefter gitteret til at konstruere vektorer som vist herunder:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. Farvelæg ens vektorer med samme farve.
2. Hvilke vektorer er parvis modsat rettede?
3. Hvilke vektorer er enhedsvektorer?
4. Hvilke vektorer er parvis parallelle?
5. Hvilke to vektorer er ortononale til ? Træk dem til og mål vinklen mellem vektorerne (bemærk, at indstillinger af måling af vinkel skal være sat til grader).
6. Tegn en vektor, der er ortogonal til .
7. Mål længden af via højreklik. Bestem længden ved udregning. (Vink: berømt græker :)).

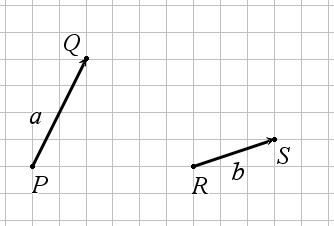
|  |
| --- |
|  |

|  |
| --- |
| **Definition**  To vektorer og er ens, når de har samme længde og retning. I så fald skriver vi: |

**Vektorer i 2D: Kommutative lov**

Vektorerne tegnes i et **Grafer** værksted. I menuen **Vis** vælges **Gitterlinjer** og vælg desuden **Skjul akser**. Sæt **X-** og **Y-skala** til ”**1**” under vinduesindstillinger. Benyt herefter gitteret til at konstruere vektorer.

1. Indsæt fire punkter i enhedsgitteret og navngiv dem: *P*, *Q*, *R* og *S* som vist herunder.
2. Tegn to forbindelsesvektorer med udgangspunkt i de fire punkter hvor: = og = .



1. Fra punkt *Q* skal du tegne en vektor som repræsentant for via **Geometri** og **Punkter og linjer,** idet du navngiver endepunktet *S'*. Tegn nu vektor og farvelæg den blå. Du har nu konstrueret vektorsummen , som svarer til vektor .
2. Fra punkt *S* skal du tegne en vektor som repræsentant for , idet du navngiver endepunktet *Q'*. Tegn nu vektor og farvelæg den blå. Du har nu konstrueret vektorsummen , som svarer til vektor .
3. Forklar, hvad den kommutative lov betyder for summen af to vektorer, ud fra den øvelse du har lavet:

**(den kommutative lov)**

|  |
| --- |
|  |

**Vektorer i 2D: Indskudsregel**

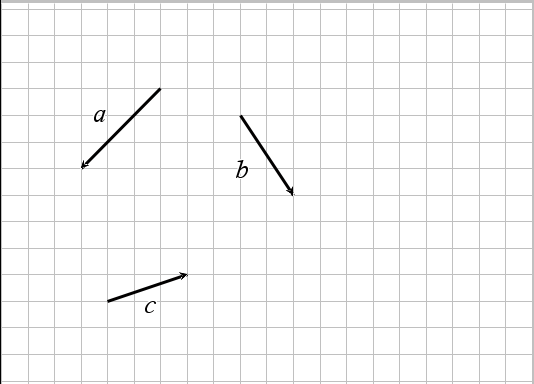
Vektorerne tegnes i et **Grafer** værksted. I menuen **Vis** vælges **Gitterlinjer** og vælg desuden **Skjul akser**. Sæt **X-** og **Y-skala** til ”**1**” under vinduesindstillinger. Benyt herefter gitteret til at konstruere vektorer.

1. Indsæt tre punkter *A*, *B* og *C* i hver sit gitterpunkt.
2. Konstruer de tre vektorer , og .
3. Hvilken vektor svarer til? Du har nu vist indskudsregelen. Hvad betyder den?

|  |
| --- |
|  |

**Vektorer i 2D: Associative lov**

Vektorerne tegnes i et **Grafer** værksted. I menuen **Vis** vælges **Gitterlinjer** og vælg desuden **Skjul akser**. Sæt **X-** og **Y-skala** til ”**1**” under vinduesindstillinger. Benyt herefter gitteret til at konstruere de tre vektorer , og som vist herunder:



1. Konstruer vektor med udgangspunkt i , navngiv den *a + b* og farvelæg den blå. Konstruer nu vektor og farvelæg summen grøn.
2. Konstruer vektor med udgangspunkt i , navngiv den *b + c* og farvelæg den rød.
3. Konstruer nu vektor med udgangspunkt i , og farvelæg summen grøn. *Men hov den findes allerede!*
4. Forklar, hvad den associative lov betyder for summen af tre vektorer, ud fra den øvelse du har lavet:

**(den associative lov)**

|  |
| --- |
|  |

**Vektorer i 2D: Modsat vektor**

Vektorerne tegnes i et **Grafer** værksted. I menuen **Vis** vælges **Gitterlinjer** og vælg desuden **Skjul akser**. Sæt **X-** og **Y-skala** til ”**1**” under vinduesindstillinger. Benyt herefter gitteret til at konstruere vektorer.

1. Indsæt to punkter *A* og *B* i hver sit gitterpunkt. Konstruer vektor .
2. Konstruer nu en modsat rettet vektor til et vilkårligt sted.
3. Sammenlign modsat vektor med vektor . Hvad kan du konkludere?

|  |
| --- |
|  |

**Vektorer i 2D: Vektordifferens**

Vektorerne tegnes i et **Grafer** værksted. I menuen **Vis** vælges **Gitterlinjer** og vælg desuden **Skjul akser**. Sæt **X-** og **Y-skala** til ”**1**” under vinduesindstillinger. Benyt herefter gitteret til at konstruere vektorer.

1. Indsæt tre punkter *A*, *B* og *C* i hver sit gitterpunkt. Konstruer vektor . Konstruer vektor .
2. Konstruer nu modsat vektor til med udgangspunkt i punkt *B*. Navngiv den modsatte vektor -*a* i tegnefladen (bemærk at det ikke muligt at navngive med vektorpil i tegnefladen) og dens endepunkt navngives punkt *D*.
3. Konstruer vektor og sammenlig med .

**Metode 2:**

1. Indsæt et punkt *P* i et gitterpunkt og konstruer en repræsentant for hhv. vektor og med fælles startpunkt i *P*.
2. Konstruer nu en vektor fra endepunktet for til endepunktet for . Sammenlig denne vektor med .

|  |
| --- |
|  |

**Vektorer i 2D: Multiplikation med et tal**

Vektorerne tegnes i et **Grafer** værksted. I menuen **Vis** vælges **Gitterlinjer** og vælg desuden **Skjul akser**. Sæt **X-** og **Y-skala** til ”**1**” under vinduesindstillinger. Benyt herefter gitteret til at konstruere vektorer.

1. Indsæt punkt *P* og *Q* i hver sit gitterpunkt. Konstruer og mål længden af .
2. Vælg **Multiplikation** via **Geometri** og **Transformation**:
   1. Klik på punkt *P* som multiplikationscenter.
   2. Klik på som det objekt, der skal skaleres.
   3. Tryk på 2-tal på tastatur som faktor og tryk **Enter**.
3. Ændre nu faktoren til hhv. 3, 0.5, -0.5, 0 og -1.
   * Hvad observerer du?
   * Hvad kaldes den vektor, du får, når du ændrer faktoren til 0?
   * Hvad kaldes den vektor, du får, når du ændrer faktoren til -1?

|  |
| --- |
|  |

**Vektorer i 2D: Vektorers koordinater - 1**

Vektorerne tegnes i et **Grafer** værksted. I menuen **Vis** vælges **Gitterlinjer** men lad 1. og 2. akserne forblive viste. Sæt **X-** og **Y-skala** til ”**1**” under vinduesindstillinger. Benyt herefter gitteret til at konstruere vektorer.

1. Indsæt punkt *O* (origo) i (0, 0).
2. Konstruer enhedsvektor med begyndelsespunkt i *O* og endepunkt i (1, 0).
3. Konstruer enhedsvektor med begyndelsespunkt i *O* og endepunkt i (0, 1).
4. Afsæt et tilfældigt punkt *P* i 1. kvadrant i et gitterpunkt. Højre-klik på punkt *P* for at vælge at få vist koordinater.
5. Konstruér stedvektor og farvelæg den blå.
6. Vælg **Multiplikation**, klik på punkt *O*, vektor og *x*-koordinaten for punkt *P*. Du har nu konstrueret .
7. Vælg **Parallelforskydning** via **Geometri** og **Transformation** og klik på efterfulgt af . Du har nu konstrueret i endepunktet for .
8. Vælg **Multiplikation**, klik på endepunktet for , vektor og *y*-koordinaten for punkt *P*. Du har nu konstrueret .
9. Mål længden af og .
10. Overbevis dig om følgende, gerne ved at trække i punkt *P*:

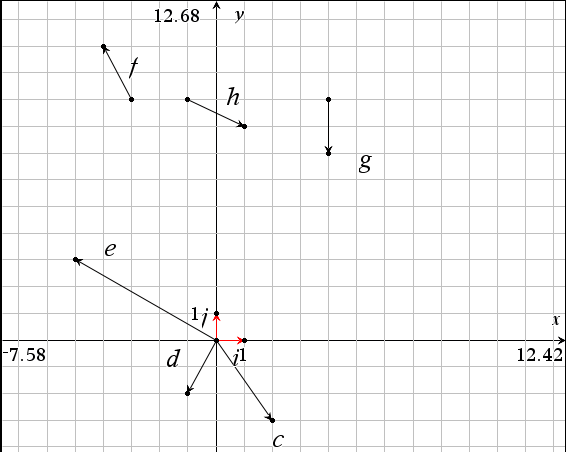
hvor *p*₁ og *p*₂ er hhv. *x*- og *y*-koordinat for punkt *P* altså *P*(*p*₁, *p*₂).

1. Hvad ville det betyde, hvis du oprettede med udgangspunkt i et frit punkt i tegnefladen og ikke i origo?

|  |
| --- |
|  |

**Vektorer i 2D: Vektorers koordinater - 2**

Vektorerne tegnes i et **Grafer** værksted. I menuen **Vis** vælges **Gitterlinjer** men lad 1. og 2. akserne forblive viste. Sæt **X-** og **Y-skala** til ”**1**” under vinduesindstillinger. Benyt herefter gitteret til at konstruere vektorer som vist herunder:



1. Konstruér vektor med udgangspunkt i origo.
2. Konstruér vektor med udgangspunkt i origo.
3. Udtryk de tre vektorer , og ved hjælp af og .
4. Udtryk de tre vektorer , og ved hjælp af og .

For at adskille mellem koordinater til et punkt og koordinaterne til en vektor er notationen følgende.

for

1. Tegn følgende vektorer i 4. kvadrant og gør dem grønne:

|  |
| --- |
|  |

**Vektorer i 2D: Regning med vektorkoordinater (sum)**

Vektorerne tegnes i et **Grafer** værksted. I menuen **Vis** vælges **Gitterlinjer** men lad 1. og 2. akserne forblive viste. Sæt **X-** og **Y-skala** til ”**1**” under vinduesindstillinger. Benyt herefter gitteret til at konstruere vektorer.

1. Konstruér to stedvektorer og til hvert sit gitterpunkt. Vis koordinatsættene for endepunkterne. Udfyld vektorkoordinaterne i skabelonerne herunder:

og

1. Konstruér og farvelæg den nye vektor blå. Bestem koordinatsættene for endepunktet og udfyld vektorkoordinaterne for summen i skabelonen herunder:
2. Hvad gælder der tilsyneladende?

|  |
| --- |
|  |

**Vektorer i 2D: Regning med vektorkoordinater (differens)**

Vektorerne tegnes i et **Grafer** værksted. I menuen **Vis** vælges **Gitterlinjer** men lad 1. og 2. akserne forblive viste. Sæt **X-** og **Y-skala** til ”**1**” under vinduesindstillinger. Benyt herefter gitteret til at konstruere vektorer.

1. Konstruér to stedvektorer og til hvert sit gitterpunkt. Vis koordinatsættene for endepunkterne. Udfyld vektorkoordinaterne i skabelonerne herunder:

og

1. Konstruér og farvelæg den nye vektor rød. Bestem koordinatsættet for endepunktet og udfyld vektorkoordinaterne i skabelonen herunder:
2. Hvad gælder der tilsyneladende?

|  |
| --- |
|  |

**Vektorer i 2D: Regning med vektorkoordinater (faktor)**

Vektorerne tegnes i et **Grafer** værksted. I menuen **Vis** vælges **Gitterlinjer** men lad 1. og 2. akserne forblive viste. Sæt **X-** og **Y-skala** til ”**1**” under vinduesindstillinger. Benyt herefter gitteret til at konstruere vektorer.

1. Konstruér en stedvektorer til et gitterpunkt, og bestem koordinatsættet for endepunktet. Udfyld koordinaterne i skabelonen herunder:

1. Vælg **Multiplikation** via **Geometri** og **Transformation**, klik på *O*, og tast 2-tal på tastaturet. Bestem koordinatsættene for endepunktet af den nye vektor. Udfyld vektorkoordinaterne i skabelonen herunder:
2. Hvad gælder der tilsyneladende? Prøv at ændre 2-tallet.

|  |
| --- |
|  |

**Vektorer i 2D: Regning med vektorkoordinater (længde af vektor)**

Vektorerne tegnes i et **Grafer** værksted. I menuen **Vis** vælges **Gitterlinjer** men lad 1. og 2. akserne forblive viste. Sæt **X-** og **Y-skala** til ”**1**” under vinduesindstillinger. Benyt herefter gitteret til at konstruere vektorer.

1. Indsæt punkt *P* i 1. kvadrant i gitterpunkt og konstruer stedvektor . Vis koordinatsæt for punkt P. Bestem ved måling.
2. Konstruér den vinkelrette til 1.-aksen gennem punkt *P* ved at vælge vinkelret, klikke på *x*-aksen og punkt *P*.
3. Konstruér skæring mellem den lodrette linje og *x*-aksen. Skæringspunktet navngives punkt *C*. Du har nu en retvinklet trekant *OPC*.
4. Mål afstandene |*OC*| og |*CP*|. Bestem afstanden mellem punkterne *O* og *P* ved udregning og dermed længden af .
5. Gør rede for følgende formel:

|  |
| --- |
|  |

**Vektorer i 2D: Forbindelsesvektor**

Vektorerne tegnes i et **Grafer** værksted. I menuen **Vis** vælges **Gitterlinjer,** men lad 1. og 2. akserne forblive viste. Sæt **X-** og **Y-skala** til ”**1**” under vinduesindstillinger. Benyt herefter gitteret til at konstruere vektorer.

1. Indsæt punkt *A* og *B* i hvert sit gitterpunkt, og bestem koordinaterne for de to punkter.
2. Konstruér og udfyld skabelonen for vektorkoordinaterne herunder:

1. Hvordan kan man ved beregning bestemme vektorkoordinaterne med udgangspunkt i koordinaterne for punkt *A* og *B*?
2. Lad punkt og og skriv en formel til udregning af koordinaterne for :

|  |
| --- |
|  |

**Vektorer i 2D: Skalarprodukt**

Vektorerne tegnes i et **Grafer** værksted. I menuen **Vis** vælges **Gitterlinjer** men lad 1. og 2. akserne forblive viste. Sæt **X-** og **Y-skala** til ”**1**” under vinduesindstillinger. Benyt herefter gitteret til at konstruere vektorer.

1. Konstruer to stedvektorer og fra *O* til hvert sit gitterpunkt.
2. Mål vinkel *v* mellem de to vektorer ved at klikke på endepunkt for efterfulgt af punkt *O* og endepunkt for . Bemærk, at det kan være nødvendigt at ændre indstillinger i TI-Nspire således at vinkler måles i grader og ikke radianer. Dette kan ændres under **Indstillinger**.
3. Træk i i "positiv omløbsretning" (mod uret), således at vinklen ændres. Hvad sker der, hvis vinklen bliver over 180°?

|  |
| --- |
|  |

**"Lås" og , således at du ikke ændrer dem igen!**

1. Mål længden af og via højreklik og måling. Skriv i nedenstående formel i **Noter** værksted og udfør beregning:
2. Bestem koordinaterne for endepunkterne for og og **Udfyld** vektorkoordinaterne herunder:

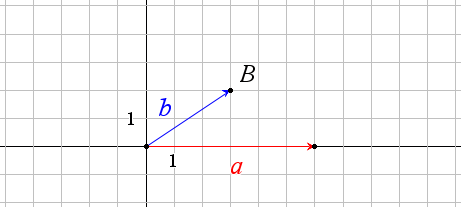
og

1. Skriv nedenstående formel i **Noter** værksted, indsæt relevante tal i formlen og tryk **Enter** for at udføre beregning:
2. Sammenlign de to udregninger. Hvad gælder der tilsyneladende?

|  |
| --- |
|  |

**Vektorer i 2D: Skalarprodukt og fortegn**

Vektorerne tegnes i et **Grafer** værksted. I menuen **Vis** vælges **Gitterlinjer** men lad 1. og 2. akserne forblive viste. Sæt **X-** og **Y-skala** til ”**1**” under vinduesindstillinger. Benyt herefter gitteret til at konstruere vektorer. Konstruer to stedvektorer og , således at er låst til 1. aksen og kan ændres ved at trække i dens endepunkt *B*:



1. Vis koordinaterne for endepunkterne for og . Udfyld vektorkoordinaterne for i skabelonen herunder:
2. Mål længden af og .
3. Mål vinkel *v* mellem og .
4. Træk i punktet *B* til nævnte position og udfyld tabellen herunder:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Placering af P** |  | **Aflæs vinkel *v*** | **Beregn:** | **Beregn:** | **Beregningers fortegn** |
| I første kvadrant |  |  |  |  |  |
| På *x*-aksen (*x* > 0) |  |  |  |  |  |
| På *y*-aksen (*y* > 0) |  |  |  |  |  |
| I 2. kvadrant |  |  |  |  |  |
| På *x*-aksen (*x* < 0) |  |  |  |  |  |

|  |
| --- |
|  |

**Vektorer i 2D: Tværvektor**

Vektorerne tegnes i et **Grafer** værksted. I menuen **Vis** vælges **Gitterlinjer** men lad 1. og 2. akserne forblive viste. Sæt **X-** og **Y-skala** til ”**1**” under vinduesindstillinger. Benyt herefter gitteret til at konstruere vektorer.

1. Konstruer stedvektorer med startpunkt i *O* og slutpunkt i gitterpunkt.
2. Vælg **Drejning** via **Geometri** og **Transformation** og klik på punkt *O*, skriv 90 og tryk **ENTER** samt klik på .

Du har nu konstrueret 's tværvektor, som også kaldes *a*-hat og skrives .

1. Bestem koordinatsættene for slutpunkterne for og dens tværvektor. Udfyld vektorkoordinaterne herunder:

og

1. Hvad er sammenhængen mellem koordinaterne for og dens tværvektor? Prøv at ændre retning og længde af … gælder det stadig?
2. Skriv en formel for 's tværvektor:

Hvis hvordan kan du så skrive ?

1. Udregn skalarproduktet af og dens tværvektor. Forklar resultatet!

|  |
| --- |
|  |

**Vektorer i 2D: Determinant og areal**

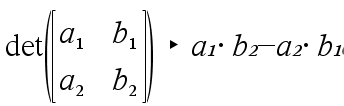
Vektorerne tegnes i et **Grafer** værksted. I menuen **Vis** vælges **Gitterlinjer** men lad 1. og 2. akserne forblive viste. Sæt **X-** og **Y-skala** til ”**1**” under vinduesindstillinger. Benyt herefter gitteret til at konstruere vektorer.

1. Konstruer to stedvektorer og med startpunkt i *O* og hver sit endepunkt i et gitterpunkt. Endepunkterne navngives hhv. *A* og *B*.
2. Vælg **Parallelforskydning** via **Geometri** og **Transformation** og klik på efterfulgt af . Du har dermed fire punkter: *O*, *A*, *B'*, og *B*.
3. Vælg **Polygon** værktøjet via **Geometri** og **Figurer**. Klik på skift på de fire punkter og afslut med at klikke på det første punkt, du valgte, f.eks. *O*, *A*, *B'*, *B*, *O*.
4. Mål arealet af parallelogrammet via højre-klik.

Opskriv vektorkoordinaterne i en 2x2 matrix:

Hvis og , udfyldes matricen således:

Determinanten udregnes med kommandoen:



1. Udregn determinanten for og med udgangspunkt i deres koordinater. Hvad ser du?
2. Udregn determinanten for og ud fra nedenstående matrix. Hvad ser du?
3. Træk i til arealet af parallelogrammet er 0. Hvad gælder der om og for at arealet er 0?

|  |
| --- |
|  |

**Vektorer i 2D: Projektion**

Vektorerne tegnes i et **Grafer** værksted. I menuen **Vis** vælges **Gitterlinjer** men lad 1. og 2. akserne forblive viste. Sæt **X-** og **Y-skala** til ”**1**” under vinduesindstillinger. Benyt herefter gitteret til at konstruere vektorer.

1. Konstruér en linje *l,* der er bundet til gitterlinjerne, og ændre dens udseende til at være stiplet via **Attributter** (højre-klik på linjen).
2. Vælg to punkter der ligger på linje *l,* og navngiv dem *P* og *Q*. Vis koordinater for *P* og *Q.*
3. Konstruér , bestem vektorkoordinater for og udfyld skabelonen herunder:
4. Konstruer med startpunkt i *P* og endepunkt i gitter, men ikke på linjen for *l*. Endepunkt for navngives *R*. Bestem vektor koordinater for og udfyld herunder:
5. Konstruer den vinkelrette til linje *l,* der går gennem punkt *R*. Den vinkelrette linje navngives *m*. Ændre udseende til stiplet linje via **Attributter**.
6. Konstruer skæring mellem linje *l* og den vinkelrette linje *m*. Skæringen navngives *S*. Vis koordinater for *S*.
7. Konstruér , der kaldes 's projektion på . Bestem længden af denne vektor ved udmåling, og bestem dens vektorkoordinater:

og

**Din konstruktion er dynamisk - smart ik´?**

1. Tjek din bestemmelse af længden af 's projektion på ved beregning ud fra følgende formel:

|  |
| --- |
| Lænden af projektionen af på er: |

1. Tjek din bestemmelse af vektorkoordinater til 's projektion på ved beregning ud fra følgende formel:

|  |
| --- |
| Antag på er egentlige vektorer. Så er projektionen af på givet ved: |

|  |
| --- |
|  |