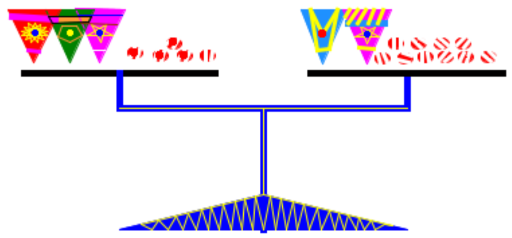
Ligningsløsning – som det at løse gåder ☺

Nedenstående er et skærmklip fra en TI-Nspirefil. Vi ser at tre kræmmerhuse og fem bolsjer balancerer med to kræmmerhuse og 10 bolsjer. Spørgsmålet er hvor mange bolsjer, der er i kræmmerhusene (der er lige mange i dem hver).

Du kan trække bolsjer og kræmmerhusene **helt fri** af vægen ved at trække til siden (henholdsvis til højre og venstre) idet kræmmerhusene trækkes i punktet i midten. *Sørg for hele tiden at bringe vægten i balance. Så hvis du fjerner et bolsje i skålen til venstre skal du også fjerne et til højre! Tilsvarende gælder for kræmmerhuse!*

	*Antallet er bolsjer i kræmmerhusene er:*

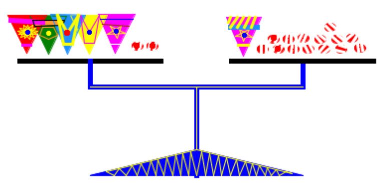
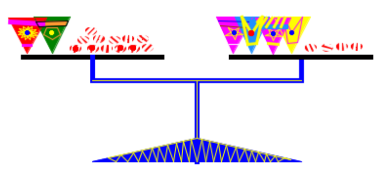
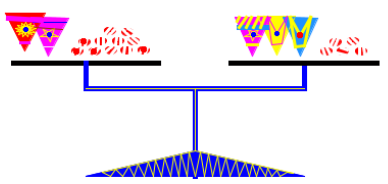
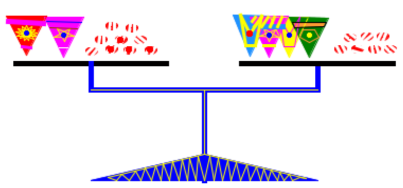
Bemærk at for at få vægten til fungere kan det være nødvendigt at evaluere formlen nederst til venstre i tns-filen ved at klikke på formlen og trykke ENTER:

Evaluer nedenstående:

$$poser(x):=\begin{cases}-\mathbf{k}, & -5\leq x\leq -1\\ \mathbf{k}, & 1\leq x\leq 5\\ 0, & \end{cases} \quad :kugler(x)$$

Øvelse 1

Bestem antallet af bolsjer i kræmmerhusene i de følgende opgaver i tns-filen, hvor kræmmerhusene i hver opgave er pakket forskelligt:

	*Antallet af bolsjer i kræmmerhusene er:*
	*Antallet af bolsjer i kræmmerhusene er:*
	*Antallet af bolsjer i kræmmerhusene er:*
	*Antallet af bolsjer i kræmmerhusene er:*

Fra ligevægt til ligning

Ligningsløsning – som at løse gåder

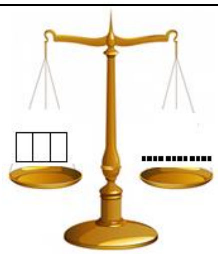
Af Brian Medveczky Olesen, MSG

En ligning er udtryk for at to størrelser er i balance. Man kan som ovenfor forestille sig en gammeldags vægt med to vægtskåle.

Vi ser at fem poser balancerer med to poser og 12 terninger – men spørgsmålet er hvor mange terninger, der er i hver pose idet der er lige mange terninger i hver. Denne oplysning kan også udtrykkes ved en ligning:

	$5 \cdot pose = 2 \cdot pose + 12$

Ved at fjerne to poser fra hver vægtskål bevarer vi ligevægten. Altså gælder der:

	$5 \cdot pose - 2 \cdot pose = 2 \cdot pose + 12 - 2 \cdot pose$ som giver at $3 \cdot pose = 12$

En tredjedel af det der er på venstre vægtskål, må veje det samme som en tredjedel af det der er på den højre vægtskål. Altså kan vi skalere ned med 3:

	$\frac{3 \cdot pose}{3} = \frac{12}{3}$ som giver at $pose = 4$ Altså er der 4 terninger i hver pose da en pose balancerer med 4 terninger

Ovenfor har vi løst en ligning. Lad x være udtryk for antal af terninger i en pose så ligner det en mere traditionel ligning ☺:

$5 \cdot pose = 2 \cdot pose + 12$ svarer dermed til ligningen $5 \cdot x = 2 \cdot x + 12$

Dermed er en ligning en formel, der udtrykker at to størrelser (udtryk) er i balance.

Hvis vi skal løse ovenstående ligning skal vi altså bestemme den værdi x kan være for at ligningen er sand (stadig i balance). Metoden til at bestemme x-værdien går ud på at isolere x på den ene side at lighedstegnet – vi skal altså have x til at stå alene på enten venstre eller højre side af lighedstegnet som vi netop gjorde ved at lade *pose* stå alene.

Øvelse 2
På **venstre** skål ligger tre poser med et ukendt antal terninger sammen med en terning. På **højre** skål ligger en pose og syv terninger.

1) Ud fra ovenstående oplysninger skal du på den første vægt herunder indtegne antallet af poser og terninger, der er i balance. Bestem herefter antallet af terninger i en pose ved hjælp af nedenstående vægte ved at fjerne poser og terninger mens der bevares ligevægt på vægten.
2) I rækken under vægtene skal du ovenfor skrive de tilsvarende ligninger idet x står for antal af terninger i en pose.

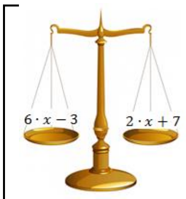
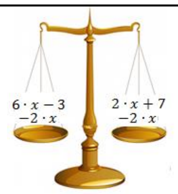
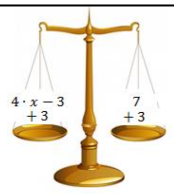
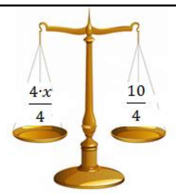
			

Sammenfatter vi ovenstående øvelser ser vi altså at der gælder et *balanceprincip*: Fjerner vi noget, eller tilføjer vi noget på den ene skål, bliver der ubalance, hvis ikke vi gør præcis det samme på den anden skål. Men foretager vi de samme operationer på begge sider gælder lighedstegnet stadig.

Det gælder følgende regler for ligningsløsning:

Nr.	Regel
1	I en ligning må samme led lægges til eller trækkes fra på hver side af lighedstegnet
2	I en ligning må man gange eller dividere med samme tal på begge sider af lighedstegnet (bare ikke med tallet 0)

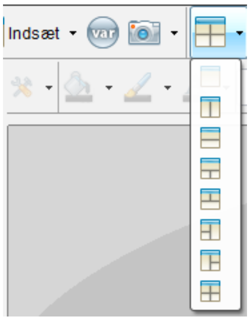
Øvelse 3
Prøv at forklare følgende billedserie ud fra balanceprincippet og ovenstående regler. Altså skal du forklare hvad der sker billede for billede for at sikre balance:

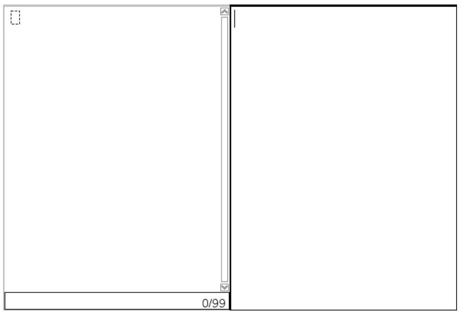
						
Hvordan forstås lignigen i forhold til poser og terninger	Hvad er der trukket fra?					

Lær at løse ligninger med TI-Nspire CAS – Trin 1

TI-Nspire CAS kan hjælpe os med at lære at løse ligninger efter balanceprincippet idet målet er at isolere en ukendt størrelse, der indgår i ligningen.

Åben TI-Nspire CAS og inddel siden i to ved at vælge det andet layouttype fra ikonen **Sidelayout**. Indsæt en **Beregner**-applikation til venstre og en **Noter**-applikation vil højre:





Skriv følgende ligning i **Beregner** værkstedet og tryk **ENTER**:

$6\cdot x-3=2\cdot x+7$	$6\cdot x-3=2\cdot x+7$

Til venstre står vores indtastning og til højre står det "*evaluerede*" resultat af vores indtastning som her er det samme!

Det er nu en god idé at **samle** *x*'erne på den ene side af lighedstegnet. Så for at forenkle ligningen kan vi trække $2\cdot x$ fra på begge sider af lighedstegnet.

I anden linje starter vi med at lave en parentes. Placer herefter cursoren inde i parentesen og brug **PIL OP** tasten på tastaturet en gang for at markere ligningen ovenfor til højre. Tryk herefter på **ENTER** på tastaturet en gang for at indsætte ligningen i parentesen:

$6\cdot x-3=2\cdot x+7$	$6\cdot x-3=2\cdot x+7$
$()$	

$6\cdot x-3=2\cdot x+7$	$6\cdot x-3=2\cdot x+7$
$(6\cdot x-3=2\cdot x+7)$	

Efter parentesen skriver vi nu $-2\cdot x$ for at trække $2\cdot x$ fra på begge sider af lighedstegnet:

$6\cdot x-3=2\cdot x+7$	$6\cdot x-3=2\cdot x+7$	Opskriver ligning
$(6\cdot x-3=2\cdot x+7)-2\cdot x$	$4\cdot x-3=7$	Trækker $2\cdot x$ fra på begge sider

VOILA! Vores ligning er blevet forenklet idet vi har 'samlet' *x*'erne på den ene side af lighedstegnet. **Bemærk** at du i **Noter**-værkstedet kan skrive hvad du har gjort!

Det er nu en god idé at **få *x*'erne til at stå alene** på den ene side af lighedstegnet. Så for at forenkle ligningen kan vi lægge 3 fra på begge sider af lighedstegnet.

I tredje linje laver vi en parentes og 'henter' den evaluerede ligning ovenfor til højre. Efter ligningen skriver vi +3, trykker **ENTER** for at evaluere ligningen og skriver note til hvad vi har gjort:

$6\cdot x-3=2\cdot x+7$	$6\cdot x-3=2\cdot x+7$
$(6\cdot x-3=2\cdot x+7)-2\cdot x$	$4\cdot x-3=7$
$()$	

$6\cdot x-3=2\cdot x+7$	$6\cdot x-3=2\cdot x+7$	Opskriver ligning
$(6\cdot x-3=2\cdot x+7)-2\cdot x$	$4\cdot x-3=7$	Trækker $2\cdot x$ fra på begge sider
$(4\cdot x-3=7)+3$	$4\cdot x=10$	Lægger 3 til på begge sider

Vi kunne nu godt gætte på et x der løser ligningen $4 \cdot x = 10$. Men lad os anvende TI-Nspire CAS til at få x til at stå HELT alene på venstre side således at det bliver klart hvad løsningen til ligningen er.

> For at forenkle ligningen skal vi skalere begge sider passende ned for at **få x til at stå alene** på højre side af ligningen. Det gør vi ved at dividere med 4 på begge sider af lighedstegnet.

Den evaluerede ligning ovenfor divideres med 4 ved at skrive /4 efter parentesen:

$6\cdot x-3=2\cdot x+7$	$6\cdot x-3=2\cdot x+7$
$(6\cdot x-3=2\cdot x+7)-2\cdot x$	$4\cdot x-3=7$
$(4\cdot x-3=7)+3$	$4\cdot x=10$
$(4\cdot x=10)/4$	

$6\cdot x-3=2\cdot x+7$	$6\cdot x-3=2\cdot x+7$	Opskriver ligning
$(6\cdot x-3=2\cdot x+7)-2\cdot x$	$4\cdot x-3=7$	Trækker $2\cdot x$ fra på begge sider
$(4\cdot x-3=7)+3$	$4\cdot x=10$	Lægger 3 til på begge sider
$\frac{4\cdot x=10}{4}$	$x=\frac{5}{2}$	Dividerer med 4 på begge sider
		Altså er x=2.5 løsning til ligningen

HURRA, vi har løst ligningen! – Eller vi har i hvert fald et bud på et x der løser ligningen. For at sikre os at vi har løst ligningen korrekt skal vi nu lave en **kontrol**. Erstat 2.5 i den oprindelige ligning i stedet for x og tryk **Enter**:

$6\cdot 2.5-3=2\cdot 2.5+7$	true

True betyder sandt – hvilket betyder at 2.5 er løsning til ligningen!

Øvelse 4

Løs nedenstående ligninger ved hjælp af TI-Nspire CAS som ovenfor:

Opgave	Ligning	Løsning
a)	$2.5 \cdot x + 4 = 16 - 3.5 \cdot x$	
b)	$-34.5 + 40 \cdot x = 4.3 - 30 \cdot x$	
c)	$130 - 12 \cdot x = 12 \cdot x + 10$	
d)	$20 + 5.5 \cdot x = 2.3 \cdot x + 11$	
e)	$\frac{-4.3}{x} = 6.5$	
f)	$-6.4 = \frac{3.3 \cdot x + 4}{3.43 \cdot x}$	

Lær at løse ligninger med TI-Nspire CAS – Trin 2

Vi skal nu gerne have indset at ligningsløsning kan betragtes som en dynamisk proces efter ligevægtsprincippet, hvor vi hele tiden anvender **modsatte** eller **omvendte funktioner** (operationer) for at forenkle ligningerne for til sidst at have isoleret en ukendt størrelse:

–3 ophæves af det modsatte tal +3

$2x$ ophæves af det modsatte led $-2x$

Gange med 4 ophæves af den omvendte operation: division med 4.

Dette gælder generelt, også for trigonometriske, eksponentielle og logaritmiske ligninger eller ligninger med potenser og rødder:

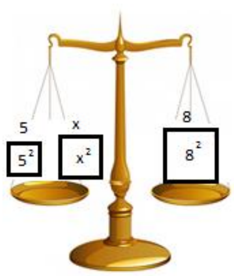
En bestemt operation ophæves at anvende den omvendte operation på begge sider af lighedstegnet.

Øvelse 5
Åben TI-Nspire CAS. Vælg **Tastatur** som tredje faneblad i venstre sidepanel og vælg herefter **TI-Nspire™ CAS med Clickpad** med **Normal** visning. Ud fra tastaturet kan du identificere omvendte regneoperationer idet + tasten ligger under – tasten og kvadratrods tegnet ligger på samme tast som kvadratet på x. Udfyld nedenstående tabel over omvendte operationer:

Operation	Omvendte operation
+	-
-	+
·	
: (eller /)	
$(..)^2$	
$\sqrt{..}$	
$(..)^n$	
$\sqrt[n]{..}$	

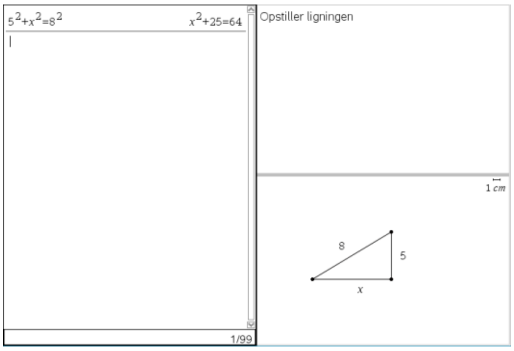
Operation	Omvendte operation
sin(..)	
cos(..)	
tan(..)	
e^x	
$\ln(x)$	
10^x	
$\text{Log}(x)$	

Vi vil nu med et eksempel vise anvendelse af omvendte operationer. Vi ved fra Pythagoras læresætning af arealerne på kvadraterne på kateterne balancerer med arealet af kvadratet på hypotenusen. Vi får oplyst at en katete er 5 og hypotenusen er 8. Altså har vi følgende balance:

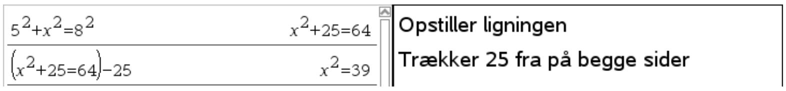


$$5^2 + x^2 = 8^2$$

Hvis vi løser ligningen med hensyn til x bestemmer vi altså længden af den sidste katete. Åben TI-Nspire CAS og inddel siden i tre med hhv. en **Beregner**, **Noter** og **Geometri** applikation. Tegn en skitse af en retvinklet trekant i **Geometri** værkstedet hvor de oplyste størrelse sættes ind og i **Beregner** værkstedet opskrives ligningen:

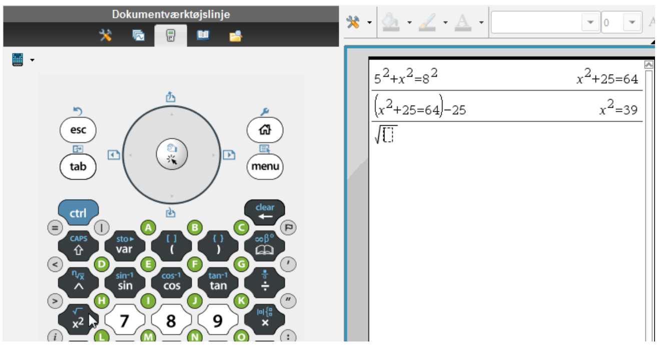


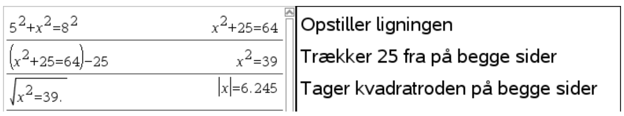
For at isolere x^2 på venstre side trækker vi 25 fra på begge sider:



At løse ligningen $x^2 = 39$ svarer til at bestemme det (de) tal der ganget med sig selv giver 39. Den omvendte operation til *at kvadrere* er *at uddrage kvadratroden*. Dermed skal vi tage kvadratroden på begge sider af lighedstegnet.

Brug lommeregner tastaturet i 3. faneblad i sidepanelet for at indsætte kvadratrodstegnet idet du skal benytte **CTRL** tasten. Indsæt ligningen ovenfor til højre og skriv eventuelt et decimalpunktum efter tallet 39. Afslut med **ENTER** for at gennemføre udregningen:





De lodrette streger omkring x betyder at den numeriske værdi af x er lig 6.245. Det svarer til at både $x = 6.245$ og $x = -6.245$ er løsning til ligningen $x^2 = 39$. I denne opgave giver det ikke mening at x er negativ idet længden af en katete ikke kan være negativ. Altså er $x = 6.245$ løsning til ligningen.

Øvelse 6
Brug de omvendte operationer/funktioner til at løse følgende ligninger i en **Beregner** applikation via lommeregner tastaturet:

a) $\cos(v) = 0.83$
b) $\log(M) = 2.9$
c) $x^3 = 68$
d) $e^{3\cdot x} = 200$