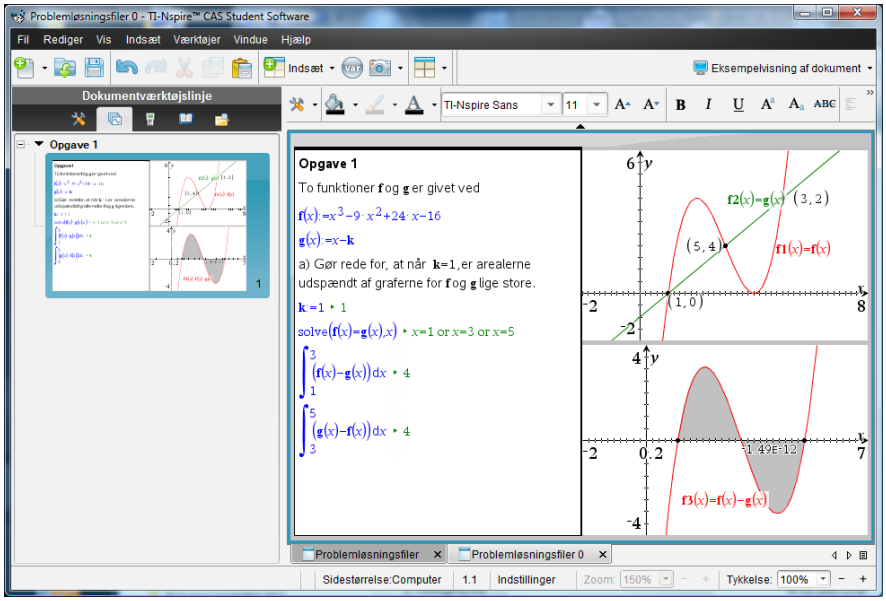
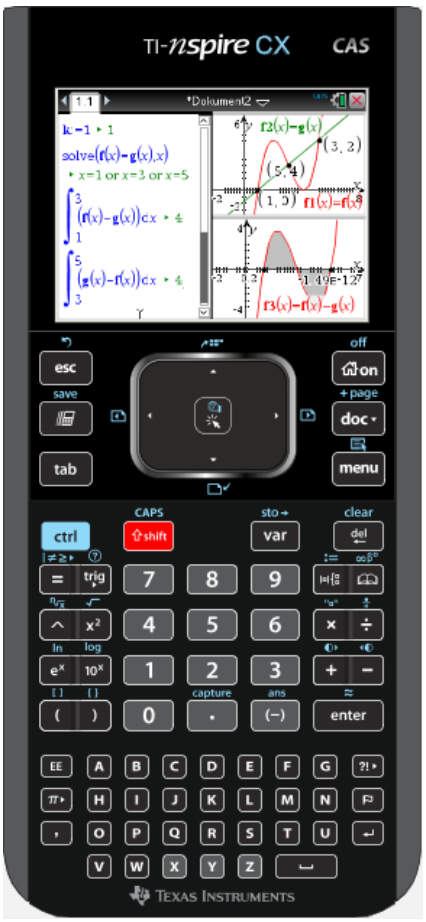




Problemløsning
i flere niveauer
med TI-Nspire CAS version 3.6

efter ADM-projektet med Lars-Eric Björk og Hans Brolin:
Funktionslära med Matematikverkstad

Indholdsfortegnelse:

Første del: Introduktion til værktøjerne

1. Graftegning og fastlæggelse af toppunkter side 2
   Øvelsesopgaver side 6
2. Numerisk løsning af ligninger side 9
   Øvelsesopgaver side 11
3. Arealberegning med integraler side 13
   Øvelsesopgaver side 17
4. Beregning af vejstrækninger mm. side 18
   Øvelsesopgaver side 19
5. Tætheder og integraler side 20
6. Rumfangsberegninger side 21
7. Buelængder side 23
8. Blandede opgaver side 24

Anden del: Problemløsning i forskellige niveauer

Niveau 1: I hvilket du bearbejder givne ligninger og funktioner. side 26

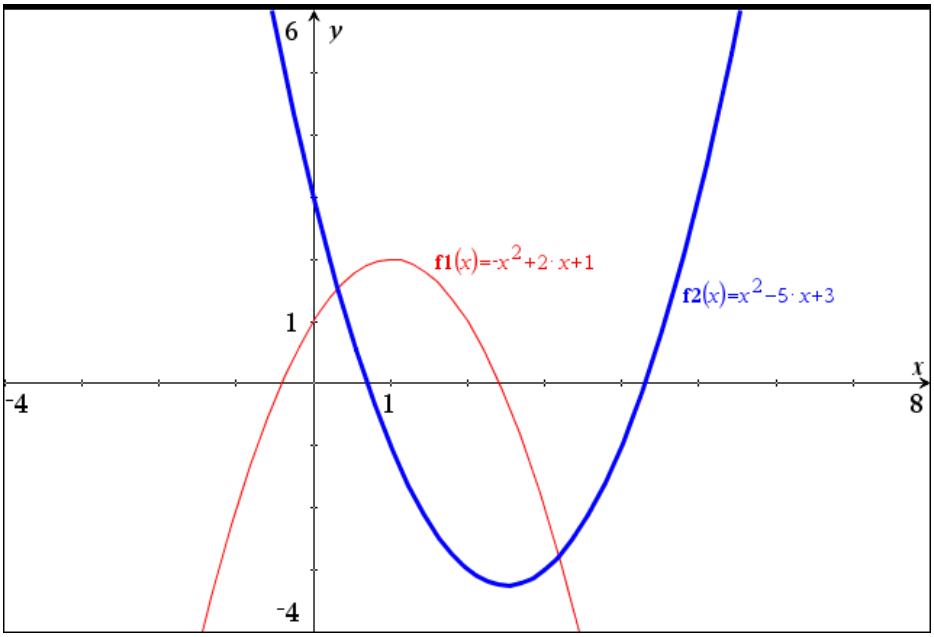
Niveau 2: I hvilket du opstiller ligninger og funktionsforskrifter ud fra givne variable og siden bearbejder sammenhængen. side 27

Niveau 3: I hvilket du indfører passende variable, opstiller ligninger og funktionsforskrifter og bearbejder sammenhængene. side 33

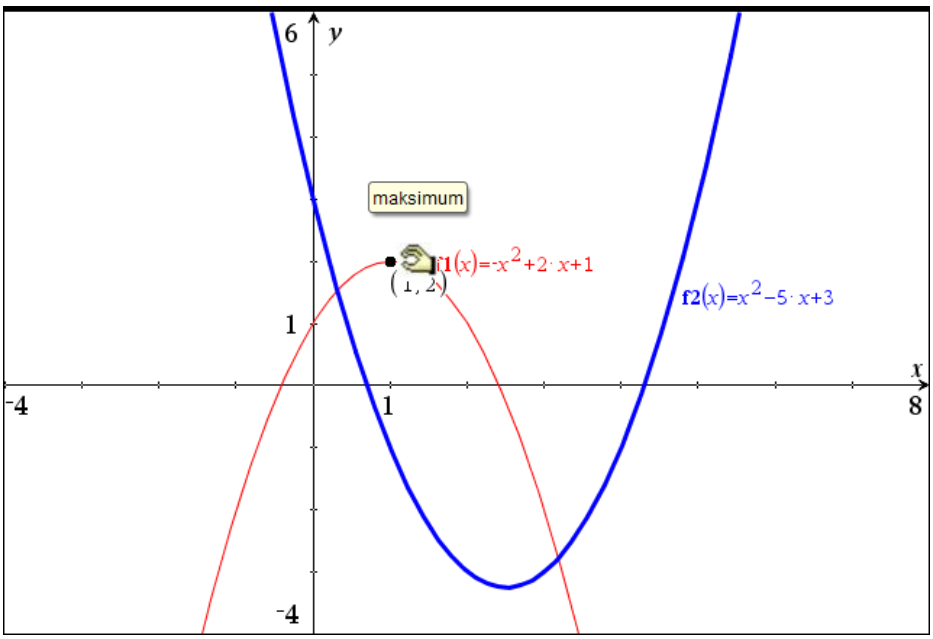
Niveau 4: I hvilket du selv formulerer problemet, indfører passende variable, opstiller ligninger og funktionsforskrifter og til sidst bearbejder sammenhængene. side 35

1. Graftegning og fastlæggelse af toppunkter

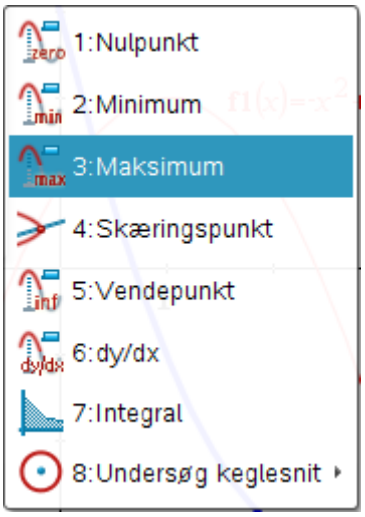
Grafer indskrives og tegnes i **Grafer**-værkstedet. Dobbeltklik i **Graf**-rummet (eller tast **CTRL-G**) for at komme op i indtastningslinjen. Hvis du ikke ønsker de skal hedde **f1**, **f2** osv., kan du ændre navnene under indtastningen af forskrifterne. Vinduesgrænserne kan ændres ved direkte indtastning af tallene på akserne – brug **TAB** til at springe mellem vinduesgrænserne. Man kan også vælge menupunktet **Vindue** > **Vinduesindstillinger**. Endeligt kan man trække i akserne ved at gribe et aksemærke. Holdes **SHIFT** nede ændres akserne uafhængigt af hinanden.

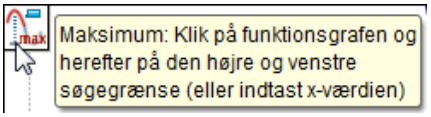


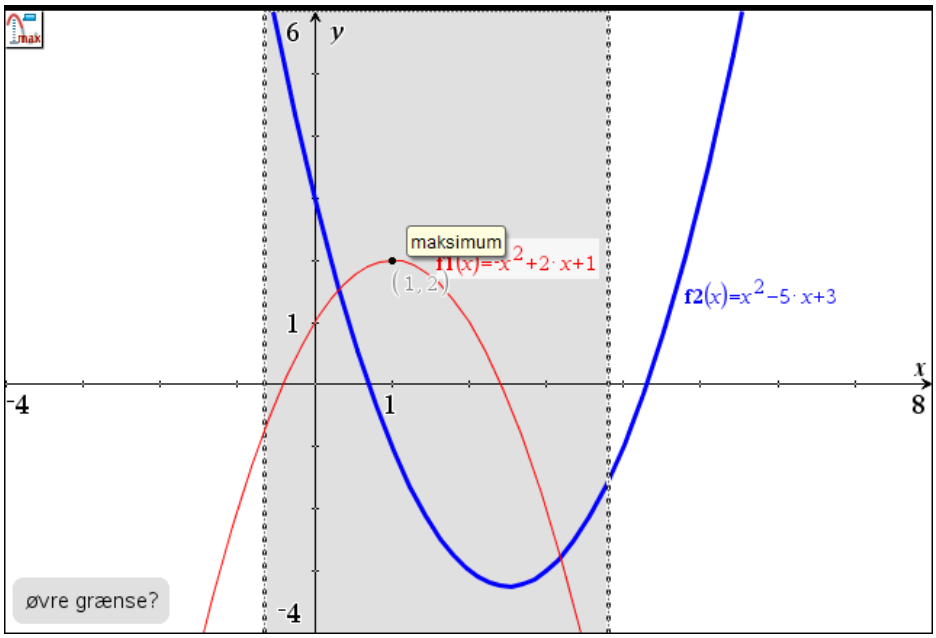
For at finde et toppunkt for en graf kan man afsætte et **punkt på** grafen og derefter forsigtigt trække det hen til toppunktet med musen. Ved et maksimumspunkt fremkommer da oplysningsteksten *maksimum*, ved et minimumspunkt oplysningsteksten *minimum*. Herefter kan koordinaterne aflæses. Læg mærke til at toppunktet er statisk – det følger *ikke* med, hvis du trækker i grafen!



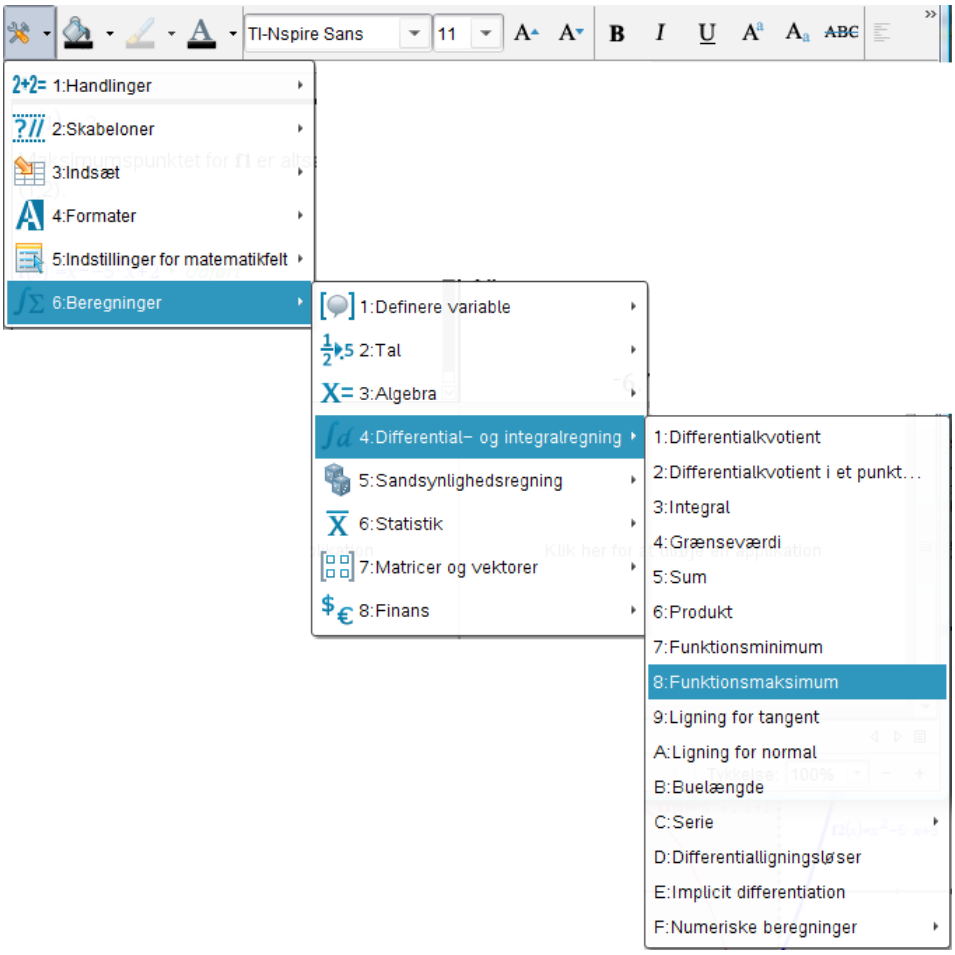
Man kan også finde toppunkter ved at udnytte **Undersøg grafer**-menuen. Resultatet er adgang til en omfattende hjælpepakke for at finde interessante punkter på en graf. Vælger man fx **Maksimum**, skal man specificere et søgeinterval i form af en **nedre grænse** og en **øvre grænse**. Det kan gøres ved at klikke med musen eller man kan direkte indtaste tallene for den nedre grænse og den øvre grænse. Læg mærke til, at når du har angivet den nedre grænse dukker maksimumspunktet op med det samme, men i starten er det bare endepunktet for søgeintervallet lige indtil du flytter musen forbi det rigtige maksimumspunkt for grafen. Det er også værd at vide at maksimumspunktet denne gang er dynamisk: Hvis du trækker i grafen (hvilket du netop kan med parabler) følger toppunktet med, så længe det ligger inden for det oprindelige søgeinterval:







Man kan selvfølgelig også bakke den grafiske undersøgelse op med en symbolsk beregning ved hjælp af kommandoerne **fMax** og **fMin** i **Noter**-værkstedet. De kan fx findes i menuen for differential- og integralregning. Man skal da oprette et matematik-felt (fx med **CTRL M**) og indskrive kommandoen med angivelse af et passende søgeinterval. Disse kommandoer skal dog anvendes med en vis omtanke! Først og fremmest skal man vide, om det er et maksimum eller minimum man ønsker at finde. Dernæst skal søgeintervallet angives præcist. Ellers er svaret vildledende. For hvis søgeintervallet slet ikke indeholder det ønskede toppunkt får man ligesom i den grafiske søgning kun oplyst det højeste punkt på grafen indenfor søgeintervallet (eller det laveste punkt på grafen indenfor søgeintervallet). Brugen af **fMin** og **fMax** bør derfor altid kontrolleres med en graftegning!




```
x_max:=right(fMax(f1(x),x)|0<x<4 ▸ 1
y_max:=f1(x_max) ▸ 2
Maksimumspunktet for f1 er altså givet ved (x_max;y_max) = (1;2).
```

Eksempel 1

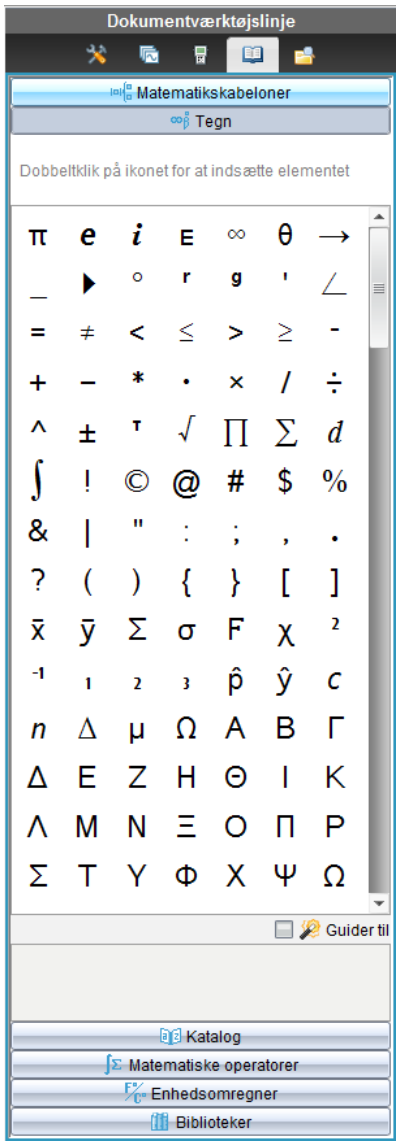
Man behøver ikke skrive det så fancy. Man kunne også have nøjes med kommandoerne:

```
fMax(f1(x),x)|0<x<4 ▸ x=1
f1(1) = 2
Maksimumspunktet for f1 er altså givet ved (1;2).
```

Eksempel 2

Pointen er imidlertid at **Noter**-værkstedet i modsætning til **Beregnings**-værkstedet er fuldt *dynamisk* og *interaktivt*, dvs. det opdateres automatisk når man fx trækker i grafen og derved ændrer toppunktet. I den lidt kunstfærdige opstilling af det første eksempel, hvor vi har navngivet resultaterne af beregningerne, sikrer vi netop en sammenhængende kæde af beregninger, der alle opdateres korrekt, når grafen ændres. I det andet eksempel er det kun forskriften for **f1**, der opdateres. Derfor bliver det kun x-værdien for toppunktet, der udregnes korrekt. Tilsvarende skal man selv håndrette i konklusionen. Igen taler det derfor for at man altid backer en udregning af et toppunkt op med en grafteg-ning.

Bemærkning 1: I de følgende opgaver skal man være opmærksom på at symbolet *e* står for grundtallet til den naturlige logaritme og derfor skal indtastes omhyggeligt. I ∞β° **Tegn**-oversigten (i venstre sidepanel under hjælpeprogrammer) står det i første række lige ved siden af tallet pi. Grundtallet for den naturlige logaritme kan også indtastes som @e, hvor det er afgørende at man bruger et lille e, idet @ efterfulgt af et stort E står for eksponenttegnet i et decimaltal. Endelig kan den naturlige eksponentialfunktion indtastes som exp().
I alle tilfældene oversættes det til et lille fedt kursivt e, når det skrives som pretty-print. Det eneste man ikke kan, er at nøjes med at taste et lille e, for så står det jo blot for en symbolsk konstant, der ikke er tilskrevet nogen værdi, ligesom bogstaverne a, b, osv.

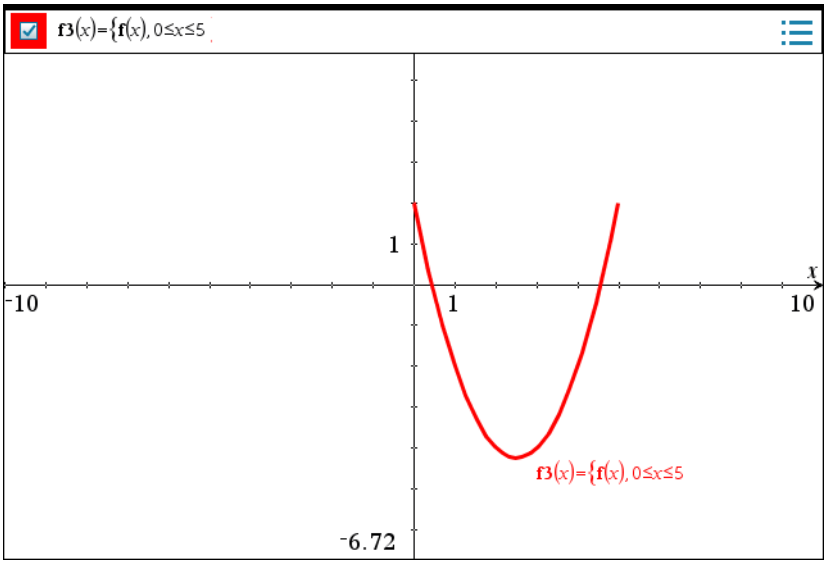


På lommeregneren har den naturlige eksponentialfunktion sin egen tast, så her opstår problemet ikke!

Bemærkning 2: I de følgende opgaver skal du ind i mellem arbejde med funktioner, der kun er defineret i et begrænset interval, fx

$$f(x)=x^2-5x+2 \quad , \quad 0\le x\le 5$$

Her skal du være opmærksom på at begrænsningen *ikke* bør medtages i definitionen af funktionens forskrift, da det besværliggør symbolske udregninger sidenhen. Definitionsintervallet tilføjes i stedet som en lokal indskrænkning ved hjælp af betingelseskommandoen |, når du tegner grafen for funktionen.



$f(x):=x^2-2\cdot x+5$ ▸ *Udført*

1.1 Tegn de følgende grafer og angiv koordinaterne til eventuelle maksimums- og minimumspunkter med to decimaler.

a) $y = 4.1 \cdot x^2 - 3.5 \cdot x^4$

b) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

c) $y = e^{2x} - 4e^x + 3$

d) $y = e^x - 2x$

1.2 Funktionen $f(x) = 0.5 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 4.5 \cdot x + 1.8$ er defineret for

$$-1 \le x \le 3.5 .$$

Tegn grafen hørende til denne definitionsmængde og angiv funktionens største- og mindsteværdi i dette interval.

1.3 Funktionen $f(x) = e^x - e \cdot x$ er defineret for $0 \le x \le 1.6$.
Tegn grafen og angiv funktionens største- og mindsteværdi.

1.4 Funktionen $f(x) = x + \sqrt{9 - x^2}$ er defineret for $-0.5 \le x \le 2.5$.
Find funktionens største- og mindsteværdi. Svaret angives med 2 decimaler.

1.5 Tegn grafen for funktionen $y = \cos x + \sin 3x$ i intervallet $0 \le x \le 2\pi$. Find koordinaterne til eventuelle lokale maksimumspunkter og minimumspunkter i dette interval.

1.6 Ved en dagsproduktion på q ton af en vare kan produktionsomkostningerne per kg, $P(q)$ kr., udregnes efter formlen

$$P(q) = 0.1 \cdot q^3 - 0.46 \cdot q^2 + 19 \qquad 1 \le q \le 5.$$

Bestem den største respektive mindste omkostning pr. kg produceret vare.

1.7 For at fremstile x tusinde enheder af en vare skønner en arbejder at omkostningen per produceret enhed (målt i kr.) følger formlen

$$y = 4x \cdot \ln(x) + 12 , \qquad x > 0$$

Hvor mange enheder skal man producere, hvis man ønsker at minimere omkostningerne?

1.8 I følge en model afhænger en persons lungevolumen y (i liter) af alderen x (i år) på den følgende måde

$$y = 110 \cdot \frac{\ln(x) - 2}{x} , \qquad x \ge 10 .$$

Fremstil en graf for personens lungevolumen for $10 \le x \le 70$ og find den alder hvor personens lungevolumen er maksimal.

1.9 Voluminet y (målt i cm^3) for 1 kg vand kan i temperaturintervallet $0 \le x \le 30$, hvor x er temperaturen i °C, udregnes efter formlen

$$y = 999.87 - 0.06426 \cdot x + 0.0085043 \cdot x^2 - 0.0000679 \cdot x^3$$

Ved hvilken temperatur er vandets densitet maksimal?

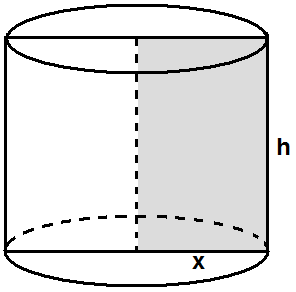
1.10 Antallet af individer i en population varierer ifølge formlen

$$P(t) = 1000 \cdot e^{\cos(\pi \cdot t)}$$

hvor t er tiden i år og der regnes i radianer.

Til hvilke tider $t > 0$ indtræffer de to første ekstremumsværdier og hvor stor er den tilhørende population?

1.11



Et rektangel har omkredsen 24 cm. Det drejes omkring en af sine sider så der dannes en cylinder, jfr. figuren.

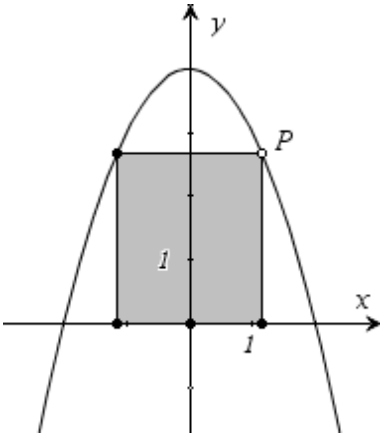
a) Bestem en sammenhæng mellem x og h.

b) Cylinderens rumfang er y cm^3. Bestem y som funktion af x.

c) Angiv definitionsmængden.

d) Bestem det største rumfang cylinderen kan antage. Svaret anføres med tre betydende cifre.

1.12



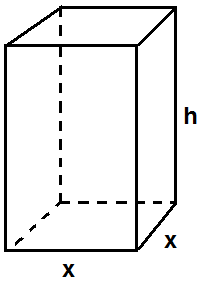
Et rektangel har som vist på figuren to hjørner på x-aksen og ét hjørne på kurven $y = 4 - x^2$ i første kvadrant.

a) Lad punktet P have x-koordinaten p og udtryk rektanglets areal A som en funktion af p.

b) Angiv definitionsmængden.

c) Bestem det største areal som rektanglet kan antage.

1.13



En kasse med låg har en kvadratisk grundflade hvis side er mindst 1 cm. Se figuren! Den samlede overflade er 600 cm^2.

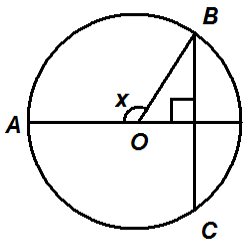
a) Bestem en sammenhæng mellem x og h.

b) Kassens rumfang er y cm^3. Udtryk y som funktion af x.

c) Angiv definitionsmængden.

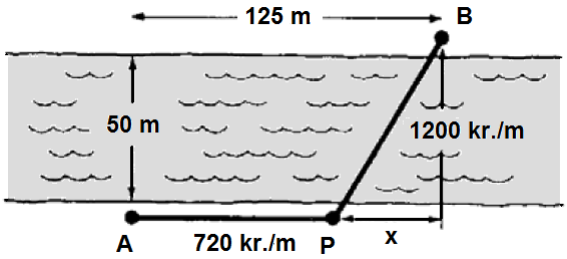
d) Bestem kassens største rumfang.

1.14



Hvor stor er vinklen AOB, når summen af buelængden AB og kordelængden BC er maksimal?

1.15



Et elkabel skal lægges fra en position A på den ene side af en kanal til en position B på den anden side af kanalen. Omkostningerne ved at grave kablet ned i marken er 720 kr./m. Under vandet er omkostningerne der imod 1200 kr./m. Hvor skal punktet P ligge for at de samlede omkostninger kan blive så små som mulige?

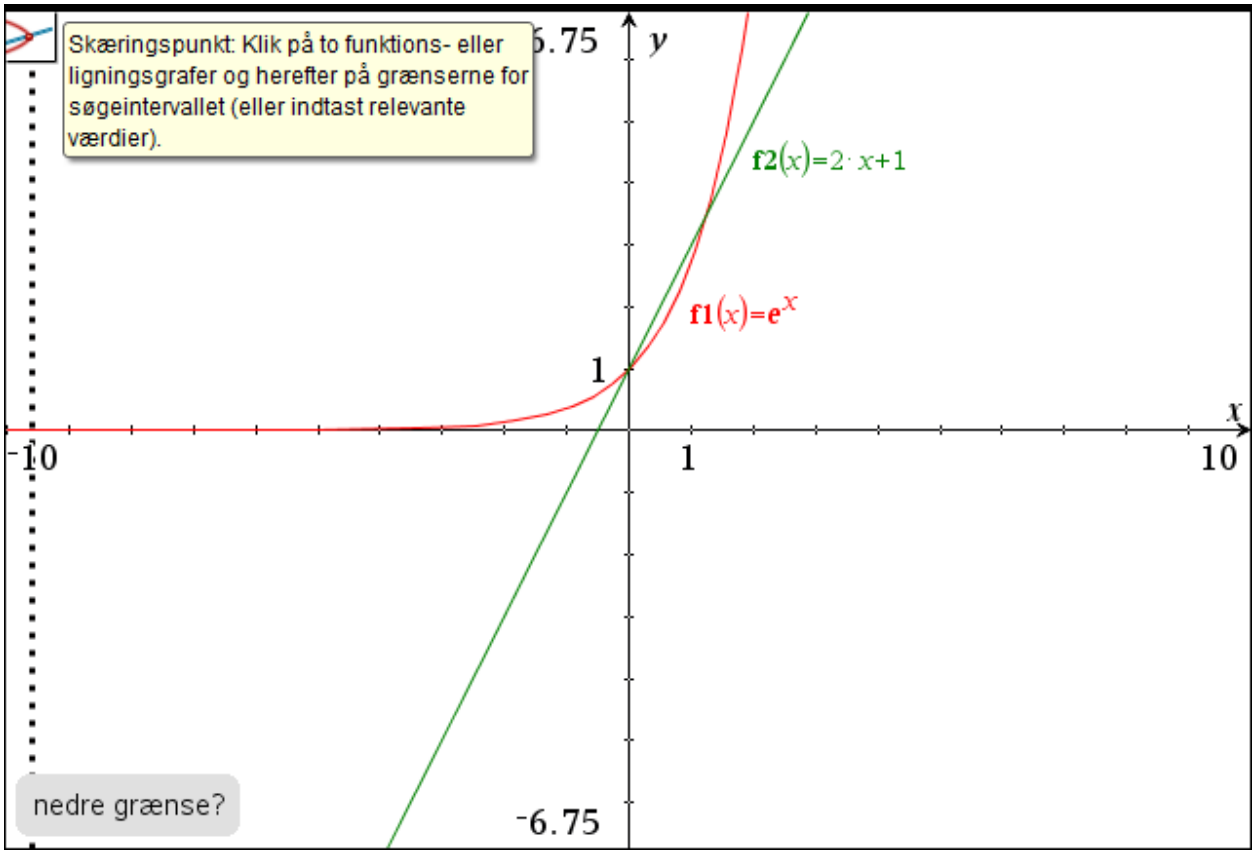
1.16 For hvilket tal mellem 0 og 1 er forskellen mellem tallet selv og dets kubus (tredjepotens) så stor som mulig?

1.17 En tråd med længden 10 cm bøjes til en cirkelbue. Undersøg arealet af det tilhørende cirkelsegment.

2. Numerisk løsning af ligninger

Eksempel 2.1 Løs ligningen $e^x = 2x+1$. Svaret anføres med to decimaler.

Opgaven kan løses **grafisk** på følgende måde: Først tegnes graferne for funktionerne $f1(x) = e^x$ og $f2(x) = 2x+1$ (svarende til de to sider af ligningen):

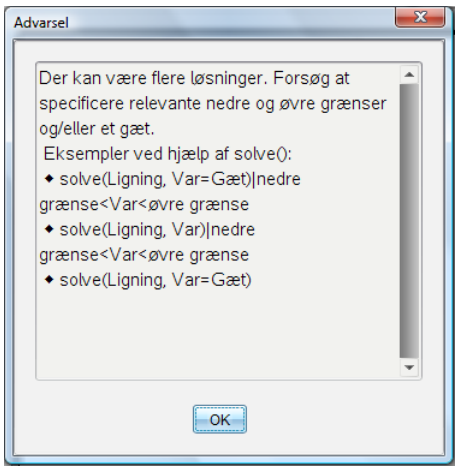


Dernæst bestemmes skæringspunkternes koordinater ved hjælp af **skæringspunkt**-værktøjet i **Undersøg Grafer-menuen** eller du afsætter et frit punkt oven i skæringspunktet:

$x = 0$ giver $y = 1$
$x = 1.25643$ giver $y = 3.51286$

Svar: Ligningen har altså løsningerne <u>$x = 0$ og $x = 1.26$</u> (med 2 dec.)

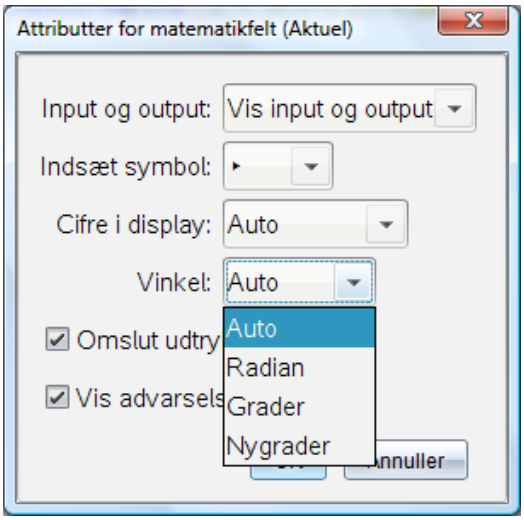
Ligningen kan også løses **numerisk** i **Noter**-værkstedet ved hjælp af en **solve**-kommando:



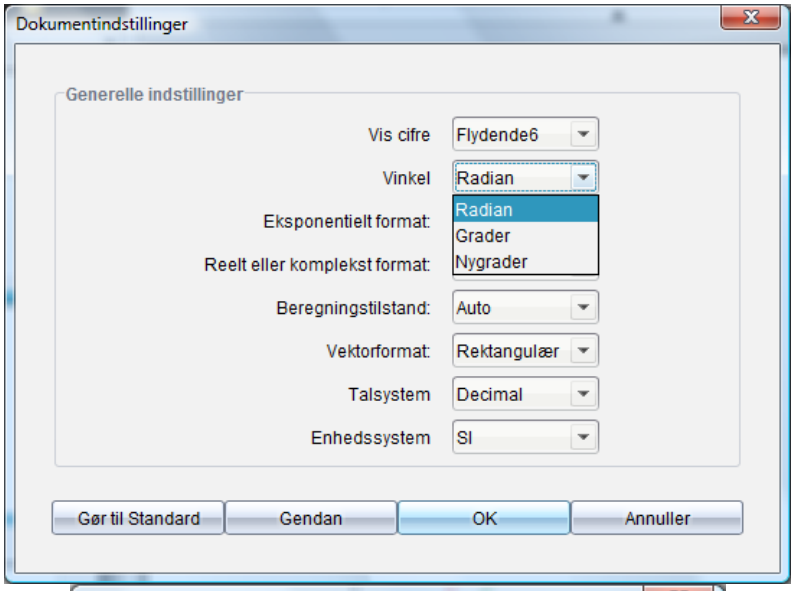
solve(f1(x)=f2(x),x) ▸ x=0. or x=1.25643⚠

Man får altså igen $x = 0$ og $x = 1.26$. Men læg mærke til advarslen! **TI-Nspire CAS** tør ikke afgøre om der kan være flere løsninger. En graftegning vil derfor under alle omstændigheder være på sin plads!

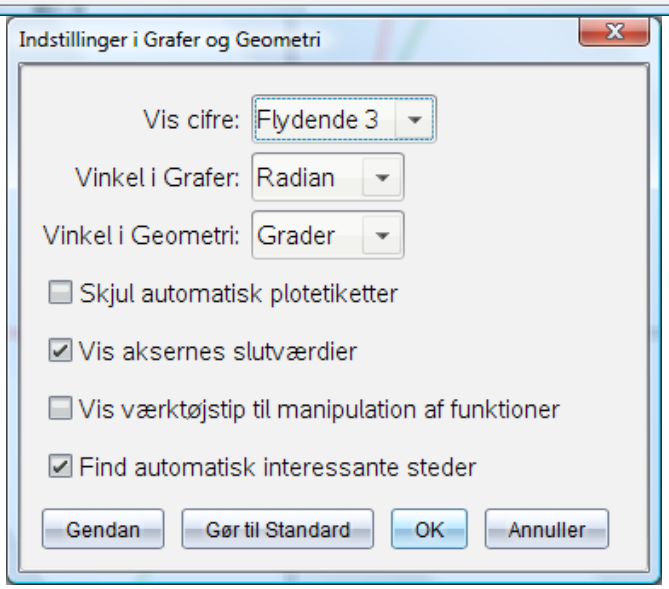
Bemærkning: I nogle af de følgende ligninger skal der regnes i *radianer*. De generelle standardindstillinger for **TI-Nspire CAS** sikrer nu netop, at der regnes i radianer i alle andre værksteder end **Geometri**-værkstedet. Med mindre man ved hvad man gør, er det klogt at følge disse standardindstillinger. Læg dog mærke til at man altid kan ændre vinkelindstillingen *lokalt* i **Noter**-værkstedet, når man arbejder i et matematikfelt, fordi vinkelindstillingen er en del af matematikfeltets attributter. Du kan ændre flere matematikbokse på én gang ved at markere dem alle.



Dokumentindstillingerne gælder for alle andre værksteder end **Grafer-** og **Geometri-værksdterderne** (der har sine egne indstillinger). Det er dokumentindstillingerne, der bestemmer hvad der sker i en matematikboks, når **Vinkel** er sat til **Auto**.



Grafer- og **Geometri-**værkstederne har deres egne indstillinger, hvor vinkelmålet som udgangspunkt er sat til **radian** i **Graf**-værkstedet og **grader** i **Geometri**-værkstede**t.**



2.2 Løs ligningerne (idet der regnes med radianer i den anden ligning!)

a) $e^x = 4 - 0.5 \cdot x$ b) $\cos x = 0.5x$

Løsningerne angives med tre decimaler.

2.3 Tegn funktionens graf og angiv antallet af nulpunkter

$$f(x) = 1 + 3x - x^3$$

$$f(x) = x^3 + 3x - 1$$

$$f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 7x + 1$$

2.4 Tegn graferne for funktionerne $f(x) = \sin(x)$ og $g(x) = e^{-x}$.

Afgør dernæst hvor mange løsninger ligningen $\sin(x) = e^{-x}$ har i intervallet $0 \le x \le 16$. NB! Der regnes i radianer!

2.5 Hvor mange løsninger har ligningerne (der regnes i radianer!)

a) $\sin(x) = 0.01x$, $x > 0$ b) $\sin(x) = 1.11 \cdot \log(x)$, $x > 0$

2.6 Bestem med fire decimaler hvor kurven med ligningen

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

skærer x-aksen.

2.7 Bestem med fem decimaler samtlige rødder til ligningerne

a) $\cos(x) = 0.5 \cdot \ln(x) - 0.2$ b) $\cos(x) = 0.25x - 0.025 \cdot x^2$

NB! Der regnes i radianer!

2.8 Der er givet ligningen $8x^5 - 5x^4 - 20x^3 + 6x = 0$.

a) Hvor mange rødder har ligningen?
b) Bestem den mindste positive rod.
c) Bestem den rod som ligger i intervallet $1 < x < 2$.
d) Bestem den største negative rod.

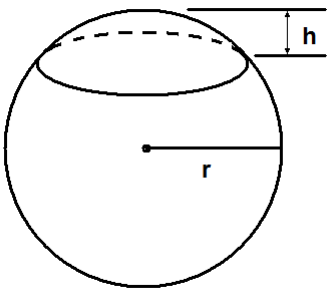
Svarene skal opgives med fem decimaler i b), c) og d)

2.9

I en formelsamling finder vi:

Kuglens rumfang = $\dfrac{4\pi r^3}{3}$

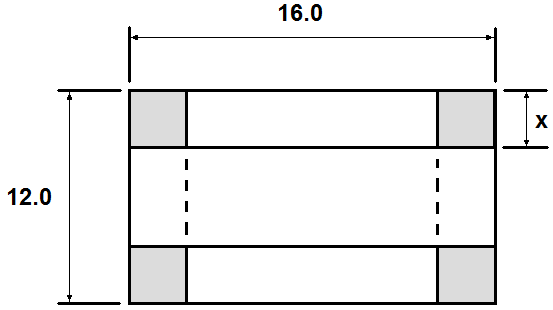
Kugleudsnittets rumfang = $\dfrac{\pi h^2}{3} \cdot (3r - h)$



Vi vil nu skære et udsnit ud af en kugle med radius 1 på en sådan måde at udsnittets rumfang bliver en fjerdedel af hele kuglens rumfang.

a) Opstil en ligning til fastlæggelse af udsnittets højde x.
b) Hvor mange løsninger har denne ligning?
c) Hvilken løsninger er relevante for vores problemstilling?
d) Bestem disse med fire decimaler.

2.11 For at frembringe en kasse bortskæres de kvadratiske hjørner fra en rektangulær papskive med målene 12.0 cm × 16.0 cm. Derefter bøjes siderne op, så man fer frembragt en åben kasse uden låg. Bestem siden for de bortklippede kvadrater, x cm, så rumfanget for kassen bliver 185 cm^3.



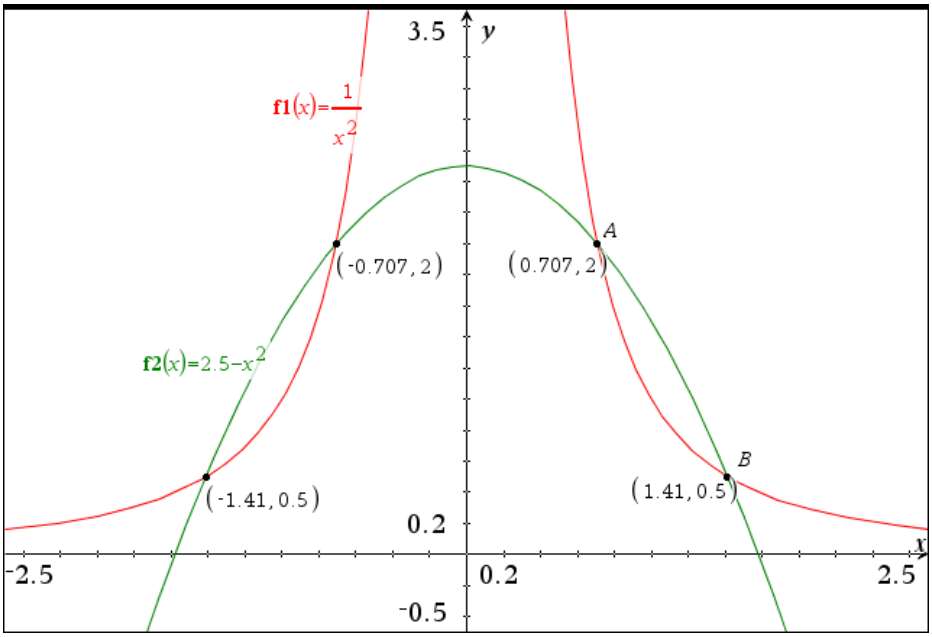
a) Opstil en ligning til fastlæggelse af x.
b) Hvor mange løsninger har denne ligning?
e) Hvilken løsning(er) er relevant(e) for vores problemstilling?
c) Bestem denne (disse).

2.12 En oliecisterne har form af som en cylinder med vandret grundflade. Summen af radius og højden skal være 12.0 m og rumfanget skal være 745 m^3. Bestem højden, x m, så cisternen bliver så lav som mulig.

3. Arealberegning med integraler

Eksempel 3.1 Kurverne med ligningerne $y=\frac{1}{x^2}$ og $y=2.5-x^2$ skærer hinanden i fire punkter, hvoraf *A* og *B* ligger i første kvadrant. Bestem arealet for det område, der indesluttes af kurvestykkerne fra *A* til *B*.

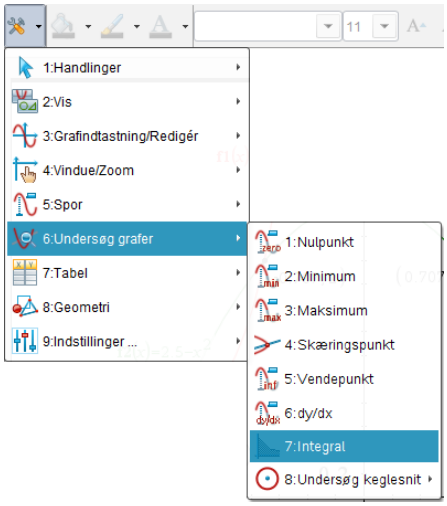
Opgaven kan løses grafisk på følgende måde. Først tegnes kurverne, så området tydeligt fremstår. Skæringspunkterne findes ved hjælp af **skæringspunkt**-værktøjet fra **Undersøg grafer**-menuen:



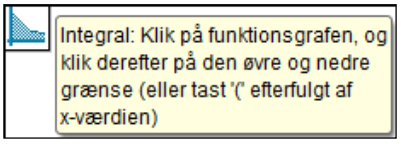
Det fremgår af figuren at skæringspunkterne *A* og *B* i første kvadrant har koordinaterne:

A(0.707; 2.) og *B*(1.41;.5)

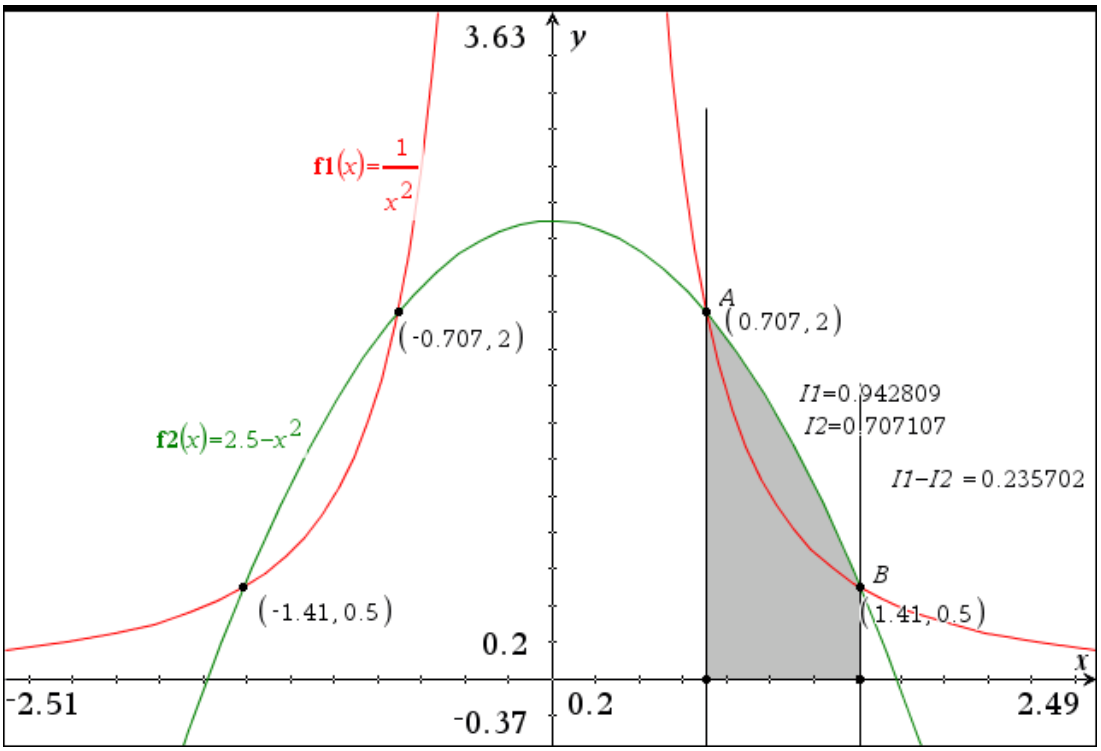
Først overføres *A* og *B's* *x*-koordinater til *x*-aksen ved at oprette de vinkelrette linjer på *x*-aksen gennem *A* og *B*. Dette gøres for at kunne udpege grænserne for integralerne præcist med musen, når vi efterfølgende anvender integral-værktøjet!



Vi kan herefter udregne arealet af området mellem de to grafer. Dette gøres ved at udregne området under $f_2(x)$ og fratrække området at arealet under $f_1(x)$. Områderne under graferne bestemmes uafhængigt af hinanden ved hjælp af **integral**-værktøjet fra **Undersøg grafer**-menuen. Vælg først værktøjet, udpeg grafen og til slut den venstre og højre afgrænsning (skæringspunkterne på *x*-aksen). Det kræver præcision at ramme afgrænsningspunkterne på *x*-aksen helt præcist!



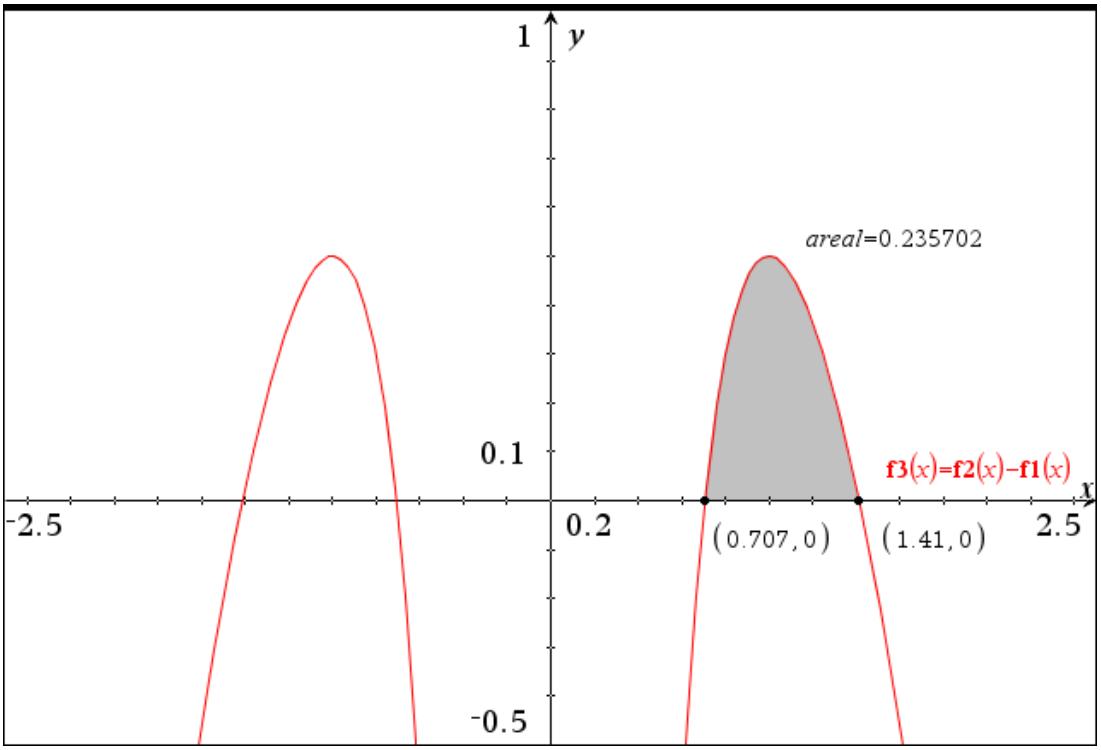
Til sidst trækkes de to integraler fra hinanden (skriv en tekstboks med formlen I2-I1 – da grafen for **f2** ligger over grafen for **f1** - og **beregn** den ved at højreklikke og udpege de fundne værdier for integralerne) og vi finder arealet til at være 0.942809 – 0.707107 = 0.235702.



Vi kan også udregne arealet ved at beregne arealet under differensfunktionen

$$\boldsymbol{f}\,\mathbf{3}(x) = \boldsymbol{f}\,\mathbf{2}(x) - \boldsymbol{f}\,\mathbf{1}(x)$$

(idet $\boldsymbol{f}\,\mathbf{2}$ ligger øverst). Derefter finder vi som vist nulpunkterne (hvis x-koordinater jo netop svarer til skæringspunkterne). Endelig bruger vi så den sædvanlige integralrutine for at finde arealet:



Resultatet bliver selvfølgelig det samme som før: 0.235702.

Endelig kan vi finde arealet ved hjælp af rent symbolske udregninger på følgende måde, idet vi indskriver 2.5 som 5/2 for at holde os til eksakte symbolske udregninger. Først finder vi grænserne for integralet, dernæst udregnes integralet symbolsk og endelig udregner vi også den talmæssige værdi af integralet fx ved at taste **CTRL-ENTER**:

$$f(x):=\frac{1}{x^2} \blacktriangleright \textit{Udført} \qquad g(x):=\frac{5}{2}-x^2 \blacktriangleright \textit{Udført}$$

$$\text{x_værdier}:=\text{exp}\blacktriangleright\text{list}(\text{solve}(f(x)=g(x),x),x) \blacktriangleright \left\{-\sqrt{2},\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right\}$$

$$\text{x_a}:=\text{x_værdier}[3] \blacktriangleright \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{x_b}:=\text{x_værdier}[4] \blacktriangleright \sqrt{2}$$

$$\text{areal}:=\int_{\text{x_a}}^{\text{x_b}}(g(x)-f(x))\,dx \blacktriangleright \frac{\sqrt{2}}{6} \qquad \text{areal} = 0.235702$$

Det eksakte areal er altså faktisk $\frac{\sqrt{2}}{6}$! Men hvis det er et praktisk brugbart resultat vi er ude efter afrundes det passende fx til fire decimaler, dvs. 0.2357. Som sædvanligt kunne vi også have opstillet udregningen meget mere direkte:

$$f(x):=\frac{1}{x^2} \blacktriangleright \textit{Udført} \qquad g(x):=\frac{5}{2}-x^2 \blacktriangleright \textit{Udført}$$

$$\text{solve}(f(x)=g(x),x) \blacktriangleright x=-\sqrt{2} \text{ or } x=\frac{-\sqrt{2}}{2} \text{ or } x=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ or } x=\sqrt{2}$$

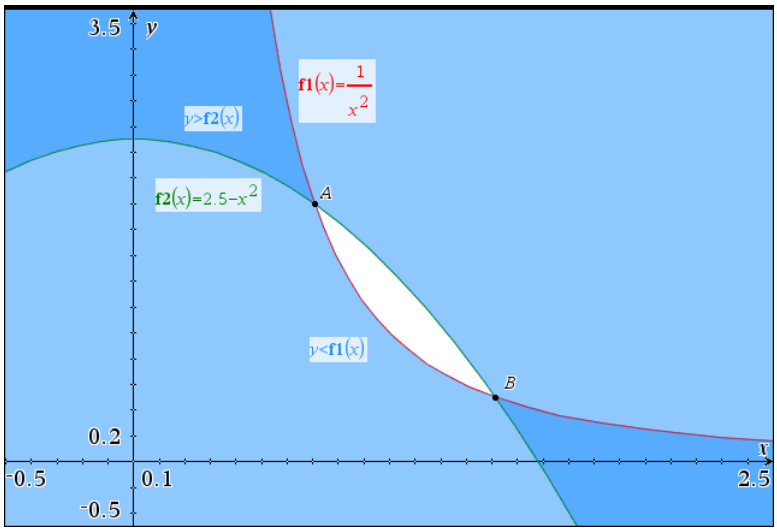
$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}(g(x)-f(x))\,dx \blacktriangleright \frac{\sqrt{2}}{6}$$

Men så mister vi dynamikken! Ændres en af forskrifterne skal vi selv efterfølgende ind og ændre i grænserne for integralet. Det er det vi i højere grad undgår ved at navngive resultaterne af beregningerne, idet vi så hele tiden refererer direkte tilbage til tidligere beregninger.

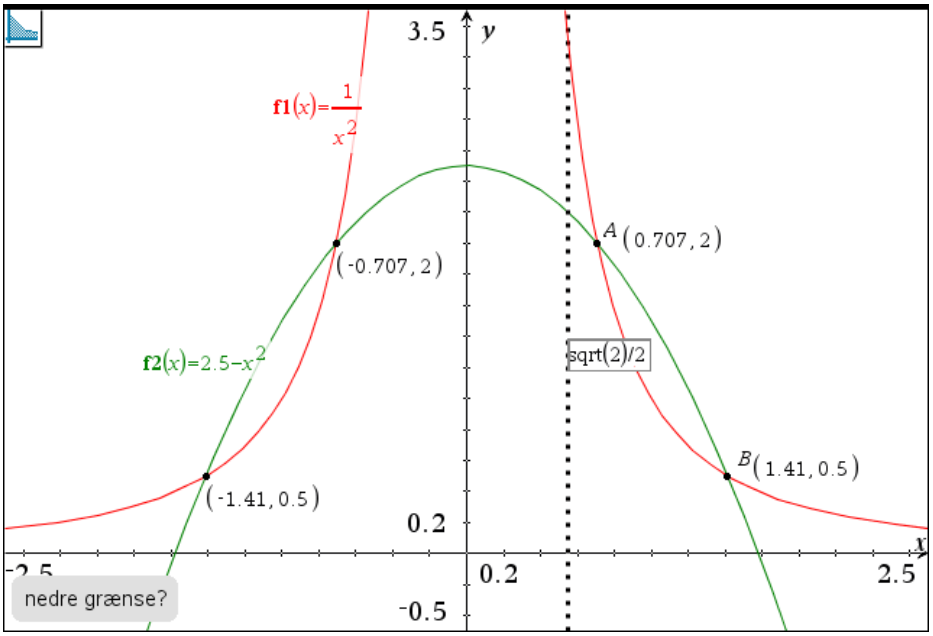
Som sædvanlig er det god skik at understøtte den symbolske udregning med en passende grafisk illustration! Fx kan man skravere det søgte område, eller rettere man kan skravere det område, der ligger udenfor ved at tegne ulighederne

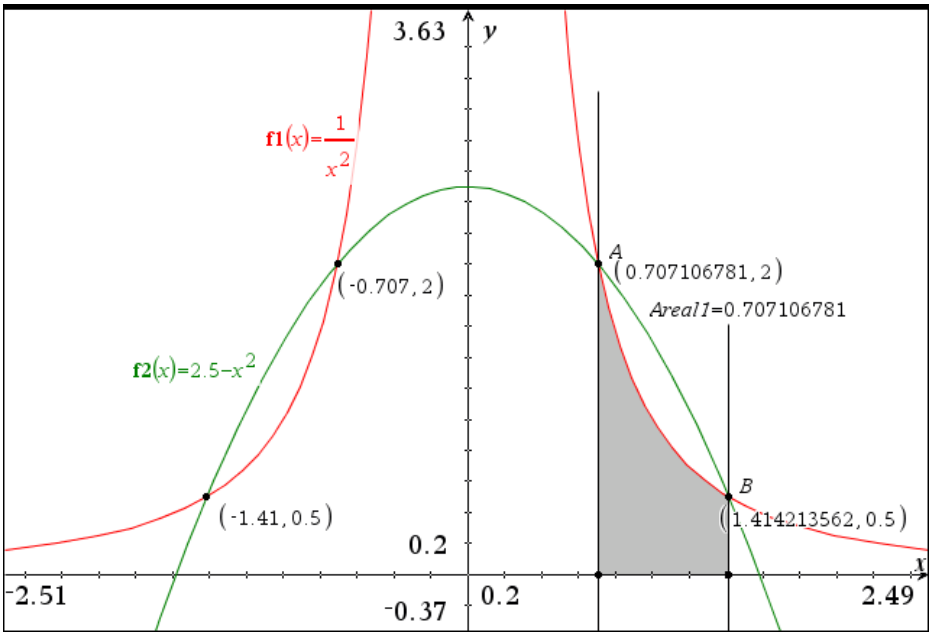
$y <$ **f1**(x) og $y >$ **f2**(x)

(På indtastningslinjen sletter du lighedstegnet for at indskrive en ulighed).



Bemærkning: I det ovenstående eksempel fastlagde vi grænserne grafisk ved at overføre skæringspunkterne til x-aksen. Det er også muligt at indtaste koordinaterne direkte. Det rejser imidlertid det problem at vi kan kun skrive talværdierne med tilnærmelse - om end vi kan trække rigtigt mange decimaler ud med attributter og derefter kopiere dem ind i koordinatudtrykket. Det kan da være nyttigt at vide at man godt kan indtaste symbolske formler i koordinatudtrykkene. Efter at have udpeget grafen for **f1** kommer vi til den nedre grænse og taster x-værdien direkte ind fra tastaturet (start med et tal, fx 2). Her kan vi da som vist direkte indskrive det symbolske udtryk $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (og tilsvarende for den øvre grænse).





En anden mulighed er at gemme skæringspunkternes koordinater i variable og så referere direkte til disse variable, når vi indtaster koordinaterne.

3.2 Beregn arealet af det område som indesluttes af kurverne

$$y = e^x \text{ og } y = 2x^2 + 5x.$$

3.3 Beregn arealet af det område som indesluttes af kurverne

$$y = 2e^{0.5x} \text{ og } y = 5.5 - 0.6x^2.$$

3.4 Beregn arealet af det område som indesluttes af kurven $y = e^x - x$ og linjen $y = x + 5$.

3.5 Beregn arealet af det område som indesluttes af kurverne

$$y = \ln(x+4) \text{ og } y = 0.5x^2.$$

3.6 Kurven $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 - 6$ afgrænser sammen med x-aksen et område. Beregn arealet af dette område.

3.7 Kurven $y = 0.3x^3 - 1.2x^2 + 2$ afgrænser sammen med x-aksen to områder. Beregn områdernes samlede areal.

3.8 Kurverne $y = \frac{4}{1+x^2}$ og $y = 3x^2 - x^3 - 2$ afgrænser to områder. Beregn arealet for hvert af disse områder.

3.9 Kurverne $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$, og $y = 0.5x^2$ afgrænser et område i planen. Beregn områdets areal.

3.10 Kurverne $y = \cos(x)^2$, $0 \le x \le \pi/2$, og $y = 0.5e^x - 0.4$ afgrænser sammen med y-aksen et område i planen. Beregn områdets areal.

3.11 Beregn arealet af det område som afgrænses af kurven $y = \sqrt{x} + 2$, y-aksen og linjen $y = x$.

3.12 Kurverne $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ og $y = 2 \cdot \cos(x)$ afgrænser et område i planen. Beregn arealet af dette område.

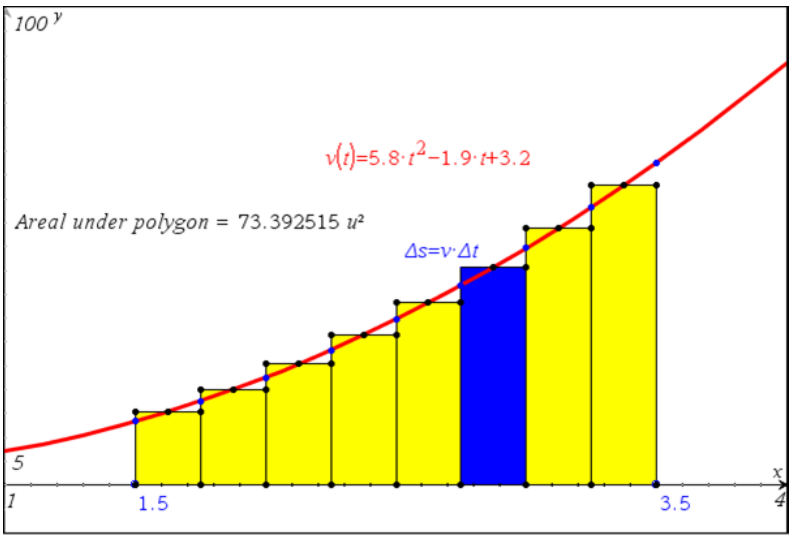
3.13 Kurverne $y = 10x - 2x^2$ og $y = 5e^{-x} - 1$ og x-aksen indeslutter tre områder.
a) Udtryk arealet af det største af områderne ved hjælp af integraler.
b) Beregn dette områdes areal.

3.14 Kurverne $y = 3x^2$ og $y = \frac{1}{x}$ samt linjen $y = 5$ indeslutter et område i første kvadrant. Beregn områdets areal.

3.15 Beregn arealet af det område i første kvadrant som indesluttes af kurven $y = \frac{1}{x^2}$ og linjerne $y = x$ og $y = 0.2x$.

4. Beregning af vejstrækninger mm.

Eksempel 4.1 En genstand bevæger sig retlinjet. Hastigheden $v(t)$ m/s er fastlagt ved formlen $v(t)=5.8\cdot t^2-1.9\cdot t+3.2$, hvor t er tiden i sekunder. Hvor langt bevæger genstanden sig tidsrummet fra t_1 = 1.5 til t_2 = 3.5?



I et lille tidsinterval Δt til tiden t kan vi med tilnærmelse opfatte hastigheden som værende konstant. Den tilhørende vejstrækning Δs kan derfor beregnes ved hjælp af sammenhængen

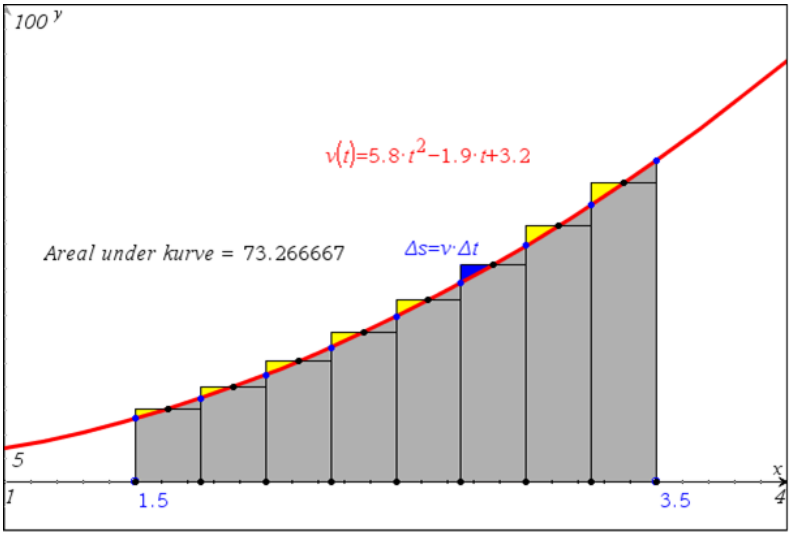
vejstrækningen = hastigheden · tiden, dvs. $\Delta s = v(t)\cdot\Delta t$

Den samlede vejstrækning er derfor givet ved arealet under hastighedskurven fra t_1 til t_2: $s_2 - s_1 = \Sigma\, v(t)\cdot\Delta t$. Her står symbolet Σ for 'summen af alle', dvs. arealet udregnes som summen af de små rektangler, hvor tilnærmelsen bliver bedre og bedre jo mindre tilvækster Δt vi anvender. Den søgte vejstrækning kan derfor udtrykkes som et integral:

$$s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

I det ovenstående tilfælde finder vi derfor vejlængden givet ved integralet

$$s = \int_{1.5}^{3.5} 5.8\cdot t^2 - 1.9\cdot t + 3.2\cdot t\,dt$$



Den søgte vejstrækning kan derfor i almindelighed udtrykkes som et integral:

$$s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$$

I det ovenstående tilfælde finder vi derfor:

$$\int_{1.5}^{3.5} \left(5.8 \cdot t^2 - 1.9 \cdot t + 3.2\right) dt = 73.2667$$

Svar: Genstanden tilbagelægger 73.3 m.

Vi kan også ræsonnere på en helt anden måde: Fra differentialregningen ved vi at hastigheden fås ved differentiation af vejstrækningen med hensyn til tiden:

$$v(t) = s'(t)$$

Men det betyder jo at vejstrækningsfunktionen er en stamfunktion til hastighedsfunktionen! Vi kan derfor finde den tilbagelagte vejstrækning som tilvæksten for vejstrækningsfunktionen, dvs. som et bestemt integral:

$$s_2 - s_1 = s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} s'(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$$

Det fører altså til den samme symbolske udregning som før.

4.2 En genstand bevæger sig retlinjet. Hastigheden $v(t)$ m/s er fastlagt ved formlen $v(t) = 10 + 14.5 \cdot t^2$, hvor t er tiden i sekunder. Hvor langt kommer genstanden i tidsintervallet fra $t = 1.5$ til $t = 2.5$?

4.3 En bold kastes lodret i vejret med hastigheden $(17 - 4.9 \cdot t)$ meter i sekundet, hvor t er tiden i sekunder. Hvor langt er bolden kommet til $t = 0.9$?

4.4 For en sportsvogn som accelerer fra hvile kan hastigheden $v(t)$ m/s i tidsintervallet $0 \le t \le 18$ beregnes ud fra formlen $v(t) = 3.7t - 0.082 \cdot t^2$, hvor t er tiden i s. Hvor langt når sportsvognen på 8 s?

4.5 Vand pumpes ind i en tank med hastigheden $(150 - 0.9t)$ liter i minuttet, hvor t er tiden i minutter. Tanken er tom til at begynde med. Hvor meget vand er der i tanken efter en halv time?

4.6 Temperaturen y °C i en smelteovn stiger med hastigheden

$$0.26t - 0.00012t^2 + 0.021 \text{ grader i sekundet,}$$

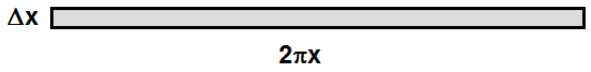
hvor t er tiden i sekunder. Bestem temperaturstigningen fra tiden $t = 10$ til tiden $t = 15$.

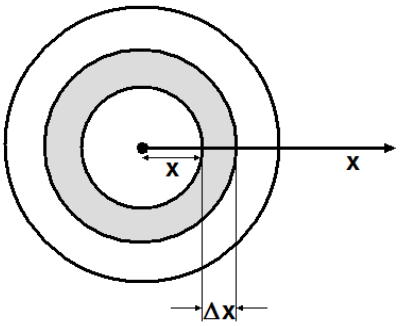
5. Tætheder og integraler

Eksempel 5.1: I en by skønner man at befolkningstætheden $f(x)$ indbyggere per kvadratkilometer varierer efter formlen $f(x)=\frac{2000}{x}$, $x > 1$, hvor x km er afstanden til centrum.

Hvor mange personer bor der i cirkelringen mellem $x = 1$ og $x = 10$?

Løsning: Vi markerer en smal cirkelring med bredden Δx. Dens areal er givet ved $\Delta A = 2\pi x \cdot \Delta x$





Befolkningsantallet indenfor den markerede cirkelring er derfor

$$\Delta P = \frac{2000}{x} \cdot \Delta A = \frac{2000}{x} \cdot 2\pi x \cdot \Delta x = 4000\pi \cdot \Delta x$$

Bidraget til befolkningsantallet indenfor striben fra x til Δx er derfor netop arealet under grafen $y = 4000\pi$. Den samlede befolkningsantal er derfor givet ved det samlede areal, dvs. kan udregnes som integralet:

$$P = \int_1^{10} 4000\pi\, dx = [4000\pi]_1^{10} = 40000\pi - 4000\pi = 36000\pi \approx 113000$$

Svar: Befolkningsantallet er <u>113 000</u>.

5.1 I en stad er befolkningstætheden $\left(2000 - x^3\right)$ indbyggere per kvadratkilometer, hvor x betegner afstanden til centrum i kilometer. Hvor mange personer bor indenfor en radius af 10 km regnet fra centrum?

5.2 Indenfor et område har man fundet ud af at tætheden for et miljøfarligt emne $f(x)$ enheder/m^2 varierer i følge formlen

$$f(x) = \frac{100}{x^2}\ ,\ x > 1$$

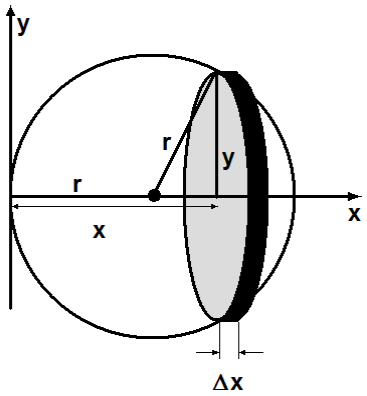
hvor x m er afstanden til centrum.

Hvor mange enheder af emnet findes der indenfor en cirkelring fra $x = 10$ til $x = 100$?

5.3 Et vandingsanlæg spreder vand indenfor et cirkulært område. Man skønner at nedbøren indenfor området i løbet af et døgn er $(100 - x)$ mm, hvor x er afstanden i meter til områdets centrum. Hvor meget vand sprøjtes ud i løbet af et døgn indenfor hele området?

6. Rumfangsberegninger

Eksempel 6.1: Bestem rumfanget for en kugle ved at opdele kuglen i 'cylinder-skiver' og siden hen integrere:



Rumfanget af en cylinderskive er givet ved $\Delta V = \pi y^2 \cdot \Delta x$. I dette tilfælde kan vi ved hjælp af Pythagoras sætning fastlægge hvordan y afhænger af x:

$$y^2 + (x-r)^2 = r^2 \text{ dvs. } y^2 = r^2 - (r-x)^2 = 2xr - x^2$$

Rumfanget af cirkelskiven er derfor givet ved

$$\Delta V = \pi \cdot (2rx - x^2) \cdot \Delta x$$

Hele rumfanget fås derfor ved at summere alle cylinderskiverne

$$V = \Sigma\, \pi \cdot (2r \cdot x - x^2) \cdot \Delta x$$

dvs. ved at integrere $\pi \cdot (2r \cdot x - x^2)$ fra $x = 0$ til $x = 2r$.

$$\pi \cdot \int_0^{2\cdot r} \left(2\cdot r\cdot x - x^2\right) dx = \frac{4\cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

Resultatet skulle gerne virke bekendt!

6.2 Det område som begrænses af kurven $y = \sqrt{x}$, x-aksen og linjen $x = 4$ drejes omkring x-aksen. Derved fremkommer et omdrejningslegeme. Opdeles det i cylinderformede skiver langs x-aksen kan rumfanget findes ved integration efter x. Find rumfanget.

6.3 Følgende områder drejes omkring x-aksen. Beregn omdrejningslegemernes volumen.

a) $y = 2x - x^2$ og x-aksen

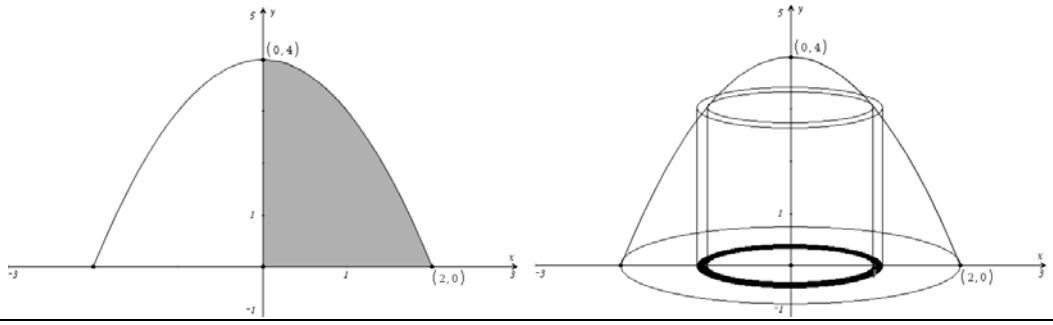
b) $y = x^2$, x-aksen, linjerne $x = 1$ og $x = 2$

c) $y = \frac{1}{x}$, x-aksen, linjerne $x = 1$ og $x = 100$

d) $y = e^{-x}$, x-aksen, linjerne $x = 0$ og $x = r$

6.4 Det område som afgrænses af kurven $y = x^2$, y-aksen og linjen $y = 9$ drejes omkring y-aksen. Beregn omdrejningslegemets rumfang ved at opdele det i cylindriske skiver langs y-aksen og siden hen integrere efter y som den uafhængige variabel!

Eksempel 6.5 Det område som afgrænses af kurven $y = 4 - x^2$, x-aksen og y-aksen drejes omkring y-aksen. Denne gang deler vi omdrejningslegemet i "cylinderskaller". Beregn rumfanget ved hjælp af en integration ud fra denne opdeling i cylinderskaller.



Løsning: Rumfanget af en cylinderskal med grundfladen $2\pi x \cdot \Delta x$ er givet ved

$$\Delta V = 2\pi x \cdot \Delta x \cdot y = 2\pi x \cdot y \cdot \Delta x = 2\pi x \cdot (4 - x^2) \cdot \Delta x = 2\pi \cdot (4x - x^3)\Delta x$$

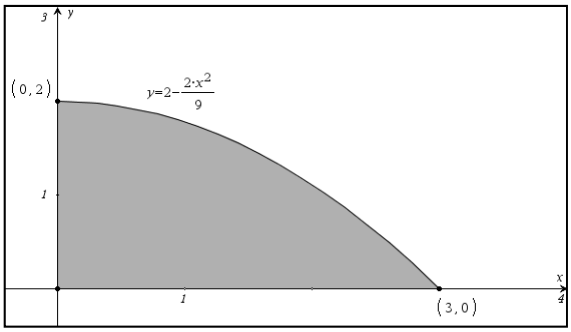
Hele rumfanget fås ved at summere cylinderskallerne $V = \Sigma\, 2\pi \cdot (4x - x^3) \cdot \Delta x$ dvs. ved at integrere funktionen $2\pi \cdot x \cdot y = 2\pi \cdot (4x - x^3)$ efter den uafhængige variabel x fra $x = 0$ til $x = 2$:

$f(x):=4-x^2$ ▸ *Udført*

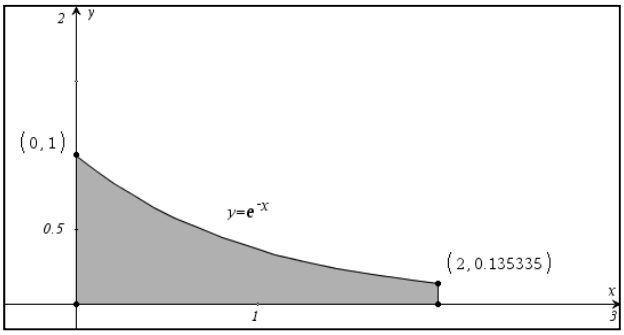
$$2\cdot\pi\cdot\int_0^2 (x\cdot f(x))\,dx = 8\cdot\pi$$

Rumfanget er altså givet ved $V = \underline{8\pi}$.

6.6 Det område som afgrænses af kurven $y = \frac{1}{x}$, x-aksen samt linjerne $x = 1$ og $x = 3$ drejes omkring y-aksen. Beregn omdrejningslegemets rumfang ved at anvende en opdeling af omdrejningslegemet i cylinderskaller.



Figur til opgave 6.7



Figur til opgave 6.8

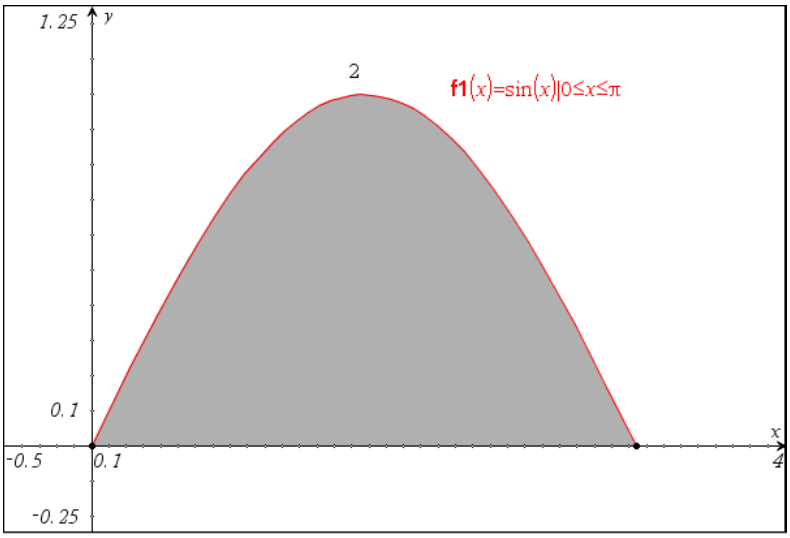
6.7 Betragt området skitseret på figuren. Opstil et integral til udregning af rumfanget for det omdrejningslegeme, der fremkommer, når området drejes omkring

a) y-aksen og du anvender metoden med cylinderskaller
b) y-aksen og du anvender metoden med cylinderskiver
c) x-aksen og du anvender metoden med cylinderskiver
d) x-aksen og du anvender metoden med cylinderskaller

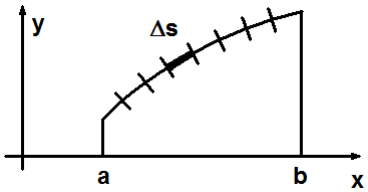
6.8 Samme opgave som i 6.7 for det viste område.

7. Buelængder

Eksempel 7.1: Arealet under sinusbuen er 2 arealenheder. Men *hvor lang er* selve buen?

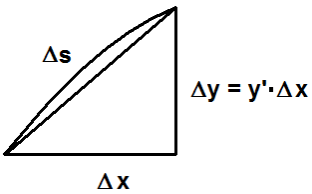


Vi forsøger os med en almen løsning på problemet! Vi inddeler kurven i et antal segmenter med længden Δs:



Hele buen bliver da $\Sigma\, \Delta s$.

Spørgsmålet er da, hvordan buelængden Δs afhænger af Δx? Vi observerer nu at der må gælde:



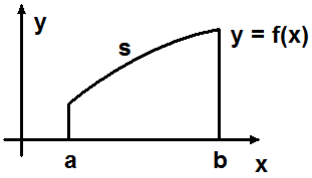
$$\Delta y = y' \cdot \Delta x$$

Ifølge Pythagoras må der yderligere gælde

$$\Delta s \approx \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\Delta x^2 + y'^2 \cdot \Delta x^2} = \sqrt{1 + y'^2} \cdot \Delta x$$

Vi finder derfor buelængden ved integration

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx$$



7.2 Opstil et integral til beregning af sinusbuens længde.

Man kan også benytte den indbyggede buelængdefunktion **Buelængde** fra **Differential- og integralregnings**-menuen:

arcLen(**f1**(x),x,0,π) = 3.82019778903

7.3 Opstil et integral til beregning af de følgende buelængder.

a) $y = x^2$ fra $x = 0$ til $x = 2$

b) $y = \ln(x)$ fra $x = 1$ til $x = 3$

c) $y = e^x$ fra $x = 1$ til $x = 2$

d) $y = e^{x^2}$ fra $x = 0$ til $x = 4$

8. Blandede opgaver

8.1 Kurven $y = e^{x^2} \cdot \cos(x)$ afgrænser for $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ sammen med x-aksen et område. Skitsér figuren og beregn områdets areal.

8.2 Kurverne $y = 3 - x^2$ og $y = x^2 - 4x + 1$ afgrænser tilsammen et område:

a) Tegn figuren.
b) Beregn x-koordinaterne til kurvernes skæringspunkter.
c) Beregn områdets areal.

8.3 Kurverne $y = \ln(x)$ og $y = (x-1)^2 - 1$ afgrænser tilsammen et område. Beregn dets areal.

8.4 Tegn kurverne $y = \sin(x)$ og $y = e^{-x}$ i intervallet $0 \le x \le \pi$. Kurverne afgrænser et område. Beregn arealet af dette område.

8.5 Ifølge tilgængelige data kan hastigheden, $v(t)$ m/s, for den anden verdenskrigs frygtede V2-raketter beskrives ved formlen

$$v(t) = 2000 \cdot \ln\left(\frac{1}{1 - 0.0098 \cdot t}\right) - 9.8 \cdot t$$

hvor t er tiden i sekunder. Man har da ignoreret luftmodstanden og antaget at raketten affyres lodret.
Hvor højt når raketten op efter 70 s, hvor alt brændstoffet er brugt op?

8.6 Hastigheden $v(t)$ m/s for en genstand som bevæger sig retlinjet følger formlen $v(t) = 2t^3 - 3t^2 - 36t + 75$, hvor t er tiden i sekunder. Bevægelsen starter til tiden $t = 0$.

a) I hvilket tidsinterval bevæger genstanden sig baglæns?
b) Hvor langt er genstanden nået, når den vender første gang?
c) Hvor vender den anden gang?
d) Hvor langt fra udgangspunktet er genstanden til tiden t = 4 og hvor lang en strækning har den da tilbagelagt?

8.7 Vandet strømmer ind i en tank med hastigheden $(5t + 4)$ liter/min. Det flyder ud med hastigheden $0.5t^2$ liter/min. I disse udryk er t tiden i min. Til tiden $t = 0$ indeholder tanken 100 liter. Hvornår er vandmængden i tanken maksimal og hvor stor er den da?

8.8 Tegn kurverne og beregn buelængderne:

a) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\quad -1 \le x \le 1$

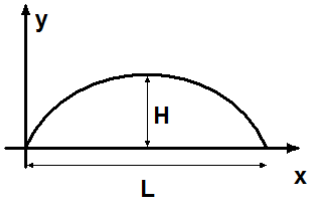
b) $y = 0.0001 \cdot x^2$, $\quad -1000 \le x \le 1000$

8.9 En diskos kastes fra origo i et koordinatsystem og følger en bane som beskrives af ligningen $y = x - 0.10x^2$

a) Angiv kastevidden *L*.

b) Bestem stighøjden *H*.

c) Beregn banens længde *S*.



8.10 Befolkningstætheden $f(x)$ indbyggere/km^2 indenfor et område følger formlen $f(x) = \dfrac{10000}{(x^2+1)^4}$, hvor x km er afstanden til områdets centrum.

Hvor mange personer bor indenfor en cirkel med midtpunktet i områdets centrum og radius 4.5 km?

8.11 Fra en træstamme har man skåret en 2.0 cm tyk cirkelformet skive med radien 25 cm. Blyindholdet i skiven øges når man bevæger sig fra centrum og ud mod kanten. Blyindholdet er $0.060 \cdot e^{-0.045x}$ mg/cm^3, hvor x cm er afstanden til centrum. Beregn skivens totale blyindhold.

8.12 Kurven $y = \ln(x)$, x-aksen og linjen $x = 4$ afgrænser et område som drejes omkring x-aksen. Beregn omdrejningslegemets rumfang.

8.13 Kurven $y = \sin(x)$ afgrænser for $2\pi \le x \le 3\pi$ sammen med x-aksen et område som drejes omkring y-aksen, hvorved et ringformet omdrejningslegeme fremkommer. Bestem rumfanget af dette omdrejningslegeme.

PROBLEMLØSNING I FORSKELLIGE NIVEUAER

Niveau 1: I hvilket du bearbejder givne ligninger og funktioner.

1 Den strækning y (målt i km) som en lastbil kan køre på en liter benzin afhænger af den hastighed som lastbilen kører med. For en given lastbil er sammenhængen givet ved

$$y = \frac{750x}{x^2 + 2500}$$, hvor x er hastigheden i km/h.

Hvilken hastighed giver det laveste benzinforbrug?

2 Den energi y (målt i J/g), som en australsk papegøje bruger pr. gram kropsvægt for at flyve en kilometer, er givet ved

$$y = \frac{0.31 \cdot (x-35)^2 + 92}{x}$$, hvor x er hastigheden i km/h.

Hvilken hastighed bør papegøjen holde, hvis den vil bruge mindst mulig energi?

3 Man kan vise, at materialeforbruget til at bygge cellerne i en bikube er så lille som muligt, når udtrykket

$$f(x) = -\frac{1}{\tan(x)} + \frac{\sqrt{3}}{\sin(x)}$$

er minimalt.
Hvilken værdi for vinklen x bør sparsommelige bier foretrække?

4 Kalles far, som er matematiklærer, påstår at Kalles vægt y (målt i kg) er givet ved

$$y = \frac{67.5 \cdot x^2 + 4.5}{x^2 + 8x + 1},$$ hvor x er Kalles alder i år.

Hvad vejede Kalle, da han blev født? Hvad var Kalles mindste vægt? Hvornår vejede Kalle 40 kg?

5 Den tid (målt i en tidsenhed, som er uden betydning her), som kræves for at sortere N poster i et register, er ifølge to forskellige metoder givet ved:

$$A: \quad 0.002N^2 + 0.009N$$
$$B: \quad 0.023N \cdot \ln(N) + 0.0002N$$

For store N-værdier er metode B bedst. For hvilke N-værdier er metode A bedst?

6 Tegn grafen med ligningen

$$y = \sin(x) + 2 \cdot \sin(x)^{500} \quad ,$$

og forsøg at forklare grafens udseende. Husk at arbejde i radianer!

Niveau 2: I hvilket du opstiller ligninger og funktionsforskrifter ud fra givne variable og siden bearbejder sammenhængen.

7 Det årlige salg af en vare fra en fabrik antages at udgøre x tusinde kg. Når man skal bestemme prisen y (målt i kr/kg) for varen, har man fundet det formålstjenstligt at anvende sammenhængen

$$y = 12 - 0.011x^2 \text{ , hvor } 10 \le x \le 25.$$

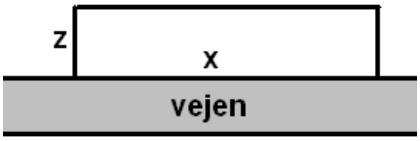
a) Angiv indtægten $I(x)$ som funktion af x.
b) Tegn grafen for indtægtsfunktionen.
c) Bestem den største og den mindste indtægt.

8 Ved fremstilling af x enheder af en vare er totalomkostningen $T(x)$ kr. givet ved

$$T(x) = x^2 + 40x + 1600 \text{ , } \quad 10 \le x \le 50$$

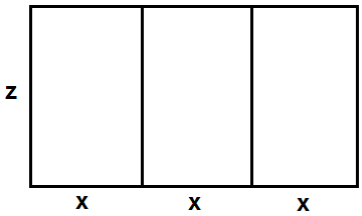
a) Angiv gennemsnitsomkostningen $G(x)$ kr./enhed som funktion af x.
b) Ved hvilket antal x bliver gennemsnitsomkostningen så lille som mulig?

9 Et rektangulært område på 6000 m² skal indesluttes af et hegn. På de tre sider koster hegnet 100 kr./m og på den fjerde side (ud mod vejen) 400 kr./m.



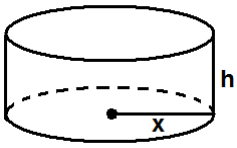
a) Opstil en sammenhæng mellem x og z.
b) Kald totalomkostningen for y kr. Udtryk y som funktion af x.
c) Hvilke værdier kan x antage?
d) Bestem den mindste værdi for y.
e) Hvilke mål har området så? Kommentér!

10 Et rektangulært område på 12000 m² skal, som figuren viser, deles i tre lige store rektangulære områder med et hegn.



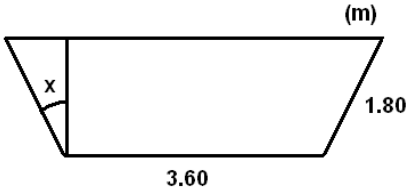
a) Opstil en sammenhæng mellem x og z.
b) Indhegningen har længden y m. Udtryk y ved x.
c) Hvilke værdier kan x antage?
d) Bestem den mindste værdi for y. Hvilke mål har området da? Kig nøje på løsningen, og kommentér dit resultat!

11 En cylinder har det totale overfladeareal 100 cm² og rumfanget y cm³.



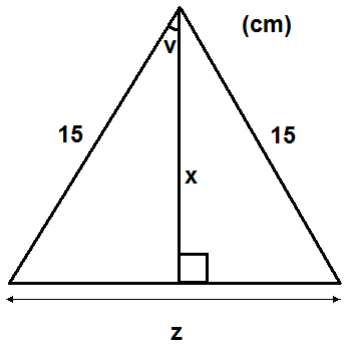
a) Bestem en sammenhæng mellem x og h.
b) Udtryk y ved x, og angiv, hvilke værdier x kan antage.
c) Bestem cylinderens mål, når voluminet er maksimalt.

12 Tværsnittet for en tømmerrende har form som et opadtil åbent, ligebenet trapez med bundbredden 3,60 m og hver af siderne 1,80 m.

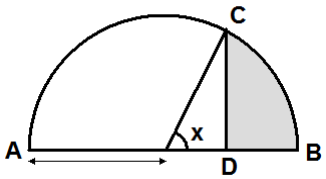


a) Tværsnitsarealet er y m^2 .
Udtryk y som funktion af vinklen x.
b) Hvilke værdier kan x antage?
c) Hvordan ser renden ud, når y er maksimal?

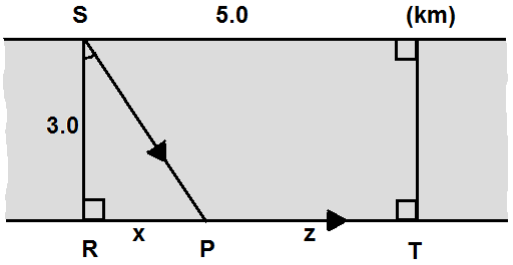
13 Se figuren! Bestem maksimum af $y = x + z$
a) ved at udtrykke y ved x.
b) ved at udtrykke y ved vinklen v.
Hvilken metode er "bedst"? Kommentér!



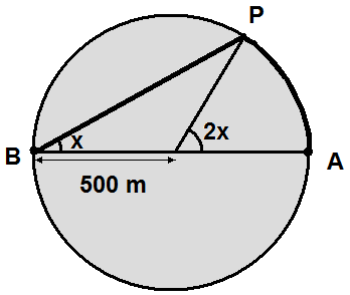
14 Figuren viser et halvcirkelformet område, hvor diameteren AB er givet ved 2l enheder. Et linjestykke CD, der står retvinklet på AB, deler området. Arealet af det skraverede område er y arealenheder.
a) Udtryk y som funktion af vinklen x.
b) Hvilke værdier kan x antage?
c) Bestem x, så arealet af det skraverede område er 1/3 af halvcirklens areal.



15 En ledning skal lægges fra S til T.
Det koster 40 kr./m i floden og 20 kr./m på land. Hvor skal punktet P placeres, hvis man vil minimere omkostningerne? De samlede omkostninger er y kr. Minimér y ved at
a) udtrykke y som funktion af x .
b) udtrykke y som funktion af z .
c) udtrykke y som funktion af v .

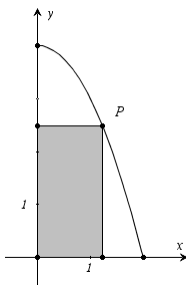


16 En cirkulær sø med radius 500 m har en sti, som går rundt om søen langs stranden. AB er en diameter. Du vil så hurtigt som muligt fra A til B.
Turen fra A til B via P varer y sekunder.
Udtryk y som funktion af vinklen x (se figuren).
a) Du svømmer 2 m/s og går 3 m/s.
b) Du svømmer 2 m/s og løber 5 m/s.



17 For "små x" i radian gælder $\sin(x) \approx x$. For hvilke x er den relative fejl, dvs. brøken $\frac{x-\sin(x)}{\sin(x)}$, i denne tilnærmelse mindre end 1 %?

18 I det område, som begrænses af koordinatakserne og kurvestykket $y = 4 - x^2$, hvor $0 \le x \le 2$, er der indskrevet et rektangel (se figur). Bestem førstekoordinaten for P, så rektanglets areal bliver 2.



19 Undersøg, hvordan antallet af løsninger (rødder) til ligningen

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 8 + a = 0$$

afhænger af tallet a.

20 Ved en kemisk proces dannes kuldioxid med hastigheden y m³/døgn, hvor $y = 4t^3 - 12t^2 + 9t$, $0 \le t \le 1.5$, og t er tiden i døgn.

a) Beregn den mængde kuldioxid, som dannes fra $t = 0$ til $t = 1$.

b) Hvornår er der dannet 0.75 m³ kuldioxid?

21 Diabetes kan undertiden behandles ved, at man indopererer en kapsel, som afgiver insulin til blodet. En forsker undersøger en bestemt kapseltype, som afgiver insulin med hastigheden

$0.52 \cdot t \cdot e^{-0.89t}$ cm³/døgn, hvor t er tiden i døgn.

a) Hvornår afgiver kapslen mest insulin pr. døgn, og hvor meget afgives da?

b) Hvor meget insulin afgiver kapslen i løbet af den første måned?

22 Nedenfor følger tre forskellige modeller for hastigheden v m/s hos en faldskærmsudspringer, hvor t er tiden i sekunder regnet fra faldets start:

A:	$v = 10t$	uden luftmodstand
B:	$v = 62.5 \cdot \dfrac{e^{0.22t} - 1}{e^{0.22t} + 1}$	med luftmodstand (uden faldskærm)
C:	$v = 62.5 \cdot \dfrac{e^{3.2t} - 1}{e^{3.2t} + 1}$	med luftmodstand (med faldskærm)

a) Hvor langt falder faldskærmsudspringeren i løbet af de første 20 s ifølge hver af de tre modeller?

b) I modellen B er den såkaldte grænsehastighed 62.5 m/s. (Hvordan indser man det?) Hvornår har udspringeren opnået en hastighed, som er 90% af grænsehastigheden?

23 En genstand bevæger sig langs en ret linje med en hastighed v m/s, som er givet ved $v = 3t^2 - 12t + 9$, hvor t er tiden i s. Genstanden starter til tiden $t = 0$. Hvor langt fra udgangspunktet befinder den sig til tiden $t = 5$, og hvor langt har den da bevæget sig i alt?

24 Et hus har en varmepumpe, som holder konstant temperatur. Om dagen køles luften i huset ned, og om natten varmes den op. Den effekt $y(t)$ (målt i W) , som tilføres eller fjernes, er givet ved

$$y = -0.29t^4 + 92.8t^2 - 4750, \qquad -12 \le t \le 12,$$

hvor t er tiden i timer (t = 0 svarer til kl. 12)

a) Hvilken samlet energi i kWh bruges der på ét døgn for at opvarme og afkøle luften?
b) Hvor stor en brøkdel af energiforbruget går til nedkølingen?

25 I en stor nationalpark udsættes 10 hjorte. Man forventer, at denne nye art i parken vil øges med en hastighed af $(t+1)\cdot 0.9^t$ hjorte/år, hvor t er tiden i år. Hvor mange hjorte vil der ifølge denne model være i parken efter

a) 5 år b) 10 år c) 100 år

26 Funktionen P angiver, hvor stor en andel af en vis befolkning som har prøvet et nyt produkt. Man ved, at

$\frac{dP}{dx} = \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$, hvor x måneder er tiden efter introduktionen.

Hvor stor del af befolkningen har prøvet det nye produkt i løbet af det første halve år efter introduktionen?

27 Væksthastigheden for en parasit, som er udsat for et bekæmpelsesmiddel, er $(6t^2 - 0.075t^4)$ tusinde parasitter/uge, hvor t er tiden i uger efter bekæmpelsens start. Til tiden t = 0 skønner man, at antallet af parasitter er 3000.

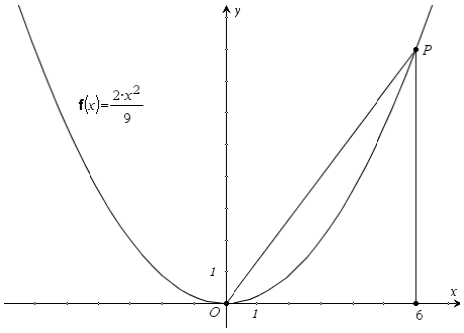
a) Hvornår er væksthastigheden størst? Hvor mange parasitter findes der da?
b) Hvornår er antallet parasitter størst? Hvor mange findes der da?
c) Hvornår er parasitterne udryddet?

28 En biolog har studeret væksten i antallet af foreller i en sø. Hun fandt, at vækst-hastigheden y fisk/uge kan udtrykkes ved

$$y = \frac{4140 \cdot e^{-0.046t}}{(1+9\cdot e^{-0.046t})^2}$$, hvor t er tiden målt i uger.

a) Beskriv, hvordan væksten varierer.
b) Til tiden t = 0 er der 1000 foreller i søen. Hvor mange er der efter 52 uger?

29 Figuren viser grafen for funktionen f givet ved $f(x)=\frac{2x^2}{9}$. På grafen er korden fra $O(0,0)$ til punktet $P(6, f(6))$ indtegnet.
Hvor mange procent er buestykket OP længere end korden OP?

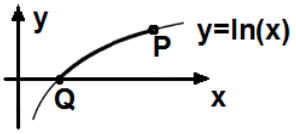


30 Taget på et skur er dækket med korrugeret plast. Profilen er sinusformet og kan beskrives med ligningen

$$y = 2.5 \cdot \sin(\tfrac{\pi}{6} \cdot x), \quad 0 \le x \le 180, \text{ (}x\text{ og }y\text{ måles i cm)}$$

Hvor lang er en sådan plastplade, inden den foldes?

31 Bestem førstekoordinaten for P, så det markerede kurve-stykke PQ på grafen for $y = \ln(x)$ får længden 5. Svaret angives med 1 decimal.



32 På bunden af en stor sø udmunder en afløbsledning fra en fabrik. En undersøgelse viser, at fabrikkens udslip indeholder et giftigt stof. Af dette giftige stof fandt man

$$1500 \cdot e^{-0.075\sqrt{x}} \text{ enheder/m}^2,$$

hvor x (målt i m) er afstanden til afløbsrørets munding.

Hvor mange enheder findes der inden for en cirkel med radius 50 m?

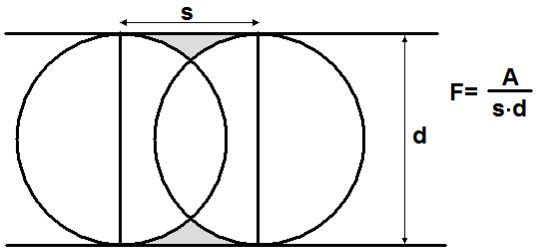
33 I et rør med radius R cm er vandhastigheden givet ved $k \cdot (R^2 - x^2)$ cm/s, $0 \le x \le R$, hvor x cm er afstanden til rørets centrum og k en konstant. Bestem, udtrykt ved R og k, den vandmængde, som pr. sekund strømmer gennem røret.

34 En stav er placeret mellem $x = 0$ og $x = 20$ på en x-akse, hvor længdeenheden er 1 m. Stavens masse pr. længdeenhed er givet ved

$$\frac{1}{\sqrt{25+x^2}} \text{ kg(m.}$$

Beregn stavens masse.

35 Ved dataudskrifter med matrixprintere efterstræber man små og overlappende punkter.



Den såkaldte blank-areal faktor F er defineret som $F = \frac{A}{s \cdot D}$ og er et mål for udskriftskvaliteten. For en bestemt matrixprinter med 24 nåle er punktdiameteren d = 0.20 mm og centerafstanden s = 0.14 mm.

Beregn F.

36 Kurven $y = 8x - x^2$ afgrænser sammen med førsteaksen et område i første kvadrant. Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, som fremkommer, når området roteres 360° omkring førsteaksen.

37 Kurven $y = 25 - x^2$ og linjen y = 9 afgrænser et område. Beregn rumfanget af det omdrejningslegeme, som fremkommer, når dette område roteres 360° omkring andenaksen.

38 Kurven $y = 2\cos(x)$ afgrænser for $0 \le x \le \pi/2$ et område i første kvadrant. Beregn rumfanget af det omdrejningslegeme, som fremkommer, når dette område drejes 360° omkring y-aksen.

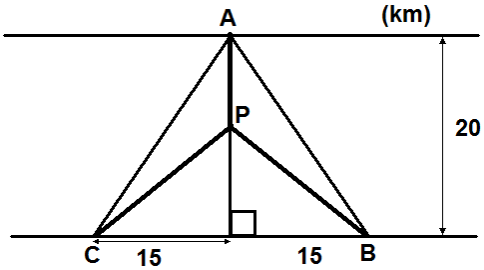
Niveau 3. I hvilket du indfører passende variable, opstiller ligninger og funktionsforskrifter og bearbejder sammenhængene.

39 En kubisk (terningeformet) papkasse skal rumme 1.5 liter, når den er fyldt op til 2.5 cm fra kassens øvre kant. Beregn kassens kantlængde.

40 Et cylinderformet legeme med rumfanget 250 cm^3 har minimalt overfladeareal. Hvilke mål har cylinderen?

41 I en ligebenet trekant er de lige store sider hver for sig 25 cm lange. Hvad bliver det største areal, som trekanten kan antage?

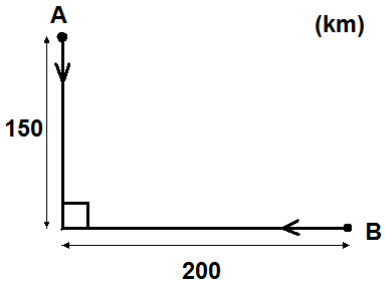
42 I hjørnerne af et ligebenet trekant ligger tre byer. Bestem placeringen af punktet *P*, så summen af længderne af strækningerne *PA*, *PB* og *PC* bliver så lille som mulig.



43 Hvilket punkt på enhedsparablen $y = x^2$ har den mindste afstand til punktet (16, 0.5) ?

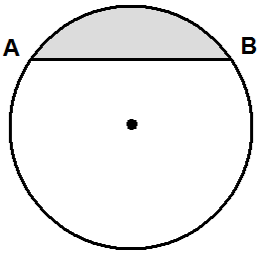
44 Fra *A* og *B* (se figuren) starter to biler samtidigt med hastighederne 30 km/h respektive 50 km/h.

Hvor tæt kommer bilerne på hinanden?



45 I en cirkel med radius 12 cm afskærer man med en korde *AB* et cirkelsegment, hvis areal er 1/4 af hele cirklens areal.

Hvor lang er korden?

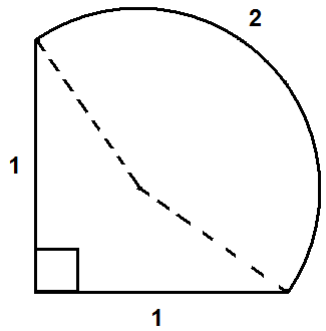


46 Gennem et punkt på en cirkel trækkes to korder, så cirkelområdets areal deles i tre lige store dele. Bestem vinklen mellem korderne.

47 *A* og *B* er to punkter på en cirkel med centrum *O*. Omkredsen af trekanten *OAB* er dobbelt så stor som cirkelbuen *AB*. Beregn centervinklen *AOB*.

48 Hypotenusen *AB* i en retvinklet trekant *ABC* er 24 cm. En cirkel her centrum i *A* og radien *AC*. Denne cirkel skærer *AB* i *P*. Cirkelbuen *CP* er 12 cm lang. Hvor lang er trekantens kateter?

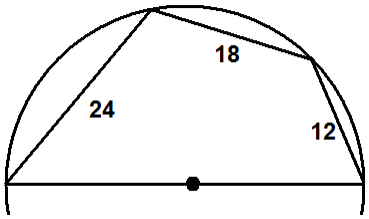
49 I et kvadrat med siden 1 deformeres to nabosider til én cirkelbue med længden 2. Sammenlign det fremkomne områdes areal med det oprindelige kvadrats areal.



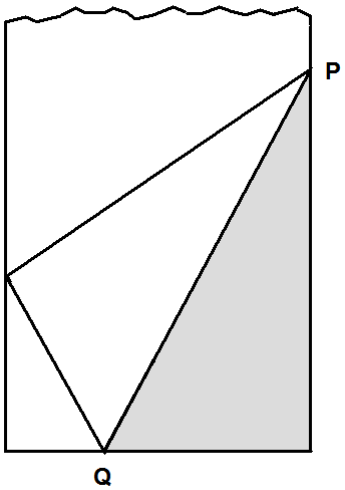
50 Fra et punkt P på kurven $y = 2\sin(x)$, $0 \le x \le \pi$, tegnes normalerne til koordinatakserne. Disse normaler og koordinatakserne danner et rektangel. Bestem førstekoordinaten til P, så rektanglet får

a) arealet 3 b) omkredsen 7 c) diagonalen 2.5 .

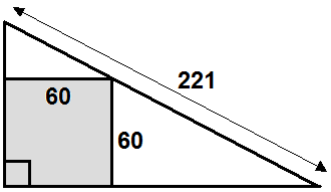
51 En firkant indskrives i en cirkel. En af siderne er diameter i cirklen.
Hvor lang er diameteren?



52 Et A4-papir foldes, så nedre højre hjørne placeres på papirets venstre kant (se figur). Hvad er den mindste værdi, som længden af folden PQ kan antage, hvis papirets bredde er 21 cm?



53 I en retvinklet trekant med hypotenusen 221 cm er der indskrevet et kvadrat med siden 60 cm (se figur). Beregn trekantens kateter.



54 Ligningen $f(x) = 0$, hvor $f(x) = \tan(x)$, har en rod mellem $x = 1$ og $x = 2$, eftersom $f(1) = 1.56$ og $f(2) = 2.19$. Påstanden ovenfor er forkert! Hvorfor?

55 Vis, at ligningen $x^3 + x - 4 = 0$ har

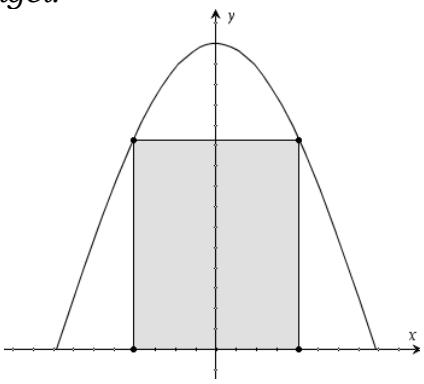
a) mindst en løsning mellem 1 og 2
b) netop én løsning mellem 1 og 2.

Niveau 4. I hvilket du selv formulerer problemet, indfører passende variable, opstiller ligninger og funktionsforskrifter og til sidst bearbejder sammenhængene.

56 *Ligningsproblemet:* $e^x = A \cdot x^2$

Undersøg situationen!

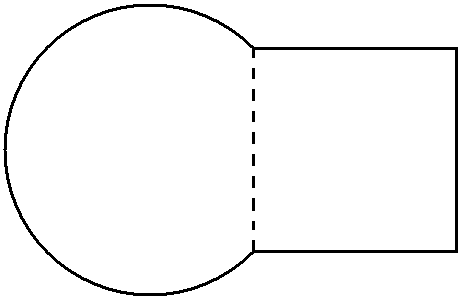
57 *Det indskrevne rektangel:*



I det område, som afgrænses af førsteaksen og kurven $y = 3\cos(x)$, hvor $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, er der indskrevet et rektangel (se figuren). Undersøg situationen!

58 *Dumpningsproblemet:*
To fabrikker *A* og *B* dumper *y* ton pr. år af et miljøfarligt stof i en sø. Udslippet aftager med tiden efter modellerne:

$$y_A = 100e^{-0.1t}$$
$$y_B = \frac{100}{1+t}$$

I begge tilfældene betegner *t* tiden i år regnet fra udslippets begyndelse. Undersøg situationen!

59 *Kvadratcirklen:*
I et kvadrat erstatter man en side med en cirkelbue. Den fremkomne figur har omkredsen 10 cm. Undersøg situationen!