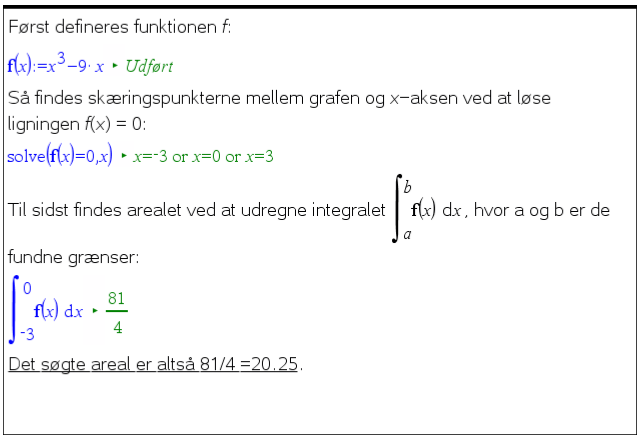
Grafen for $f(x) = x^3 - 9x$ afgrænser sammen med *x*-aksen i anden kvadrant en punktmængde. Bestem arealet af denne punktmængde.


Først defineres funktionen *f*:

$f(x):=x^3-9\cdot x$ ▸ *Udført*

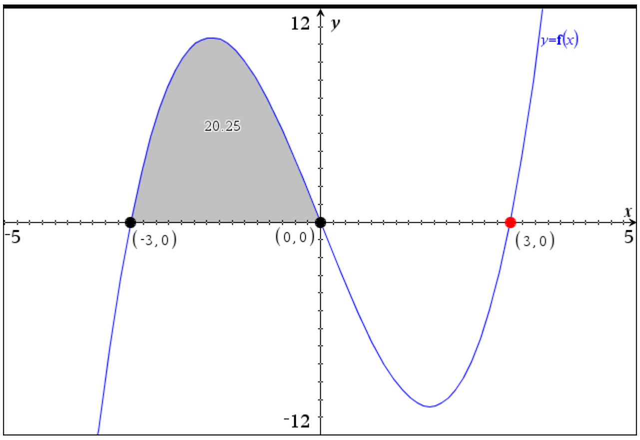
Så findes skæringspunkterne mellem grafen og x−aksen ved at løse ligningen *f*(x) = 0:

solve(f(x)=0,x) ▸ x=-3 or x=0 or x=3

Til sidst findes arealet ved at udregne integralet $\int_a^b f(x)\,dx$, hvor a og b er de fundne grænser:

$\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$ ▸ $\frac{81}{4}$

Det søgte areal er altså 81/4 =20.25.



Tip
Bestem først skæringspunkterne med *x*-aksen ved at bruge geometriværktøjet til bestemmelse af skæringspunkter (udpeg *x*-aksen som det ene objekt).

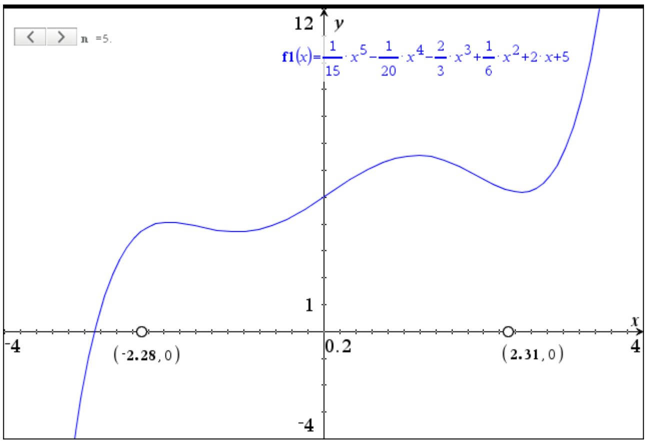
På det højre skærmbillede ser du opgaven løst med
6:Undersøg grafer ▸ 7:Integral.
Med dette værktøj skal du først udpege grænserne, dvs. de to skæringspunkter med *x*-aksen et efter et — du kan også indtaste grænserne direkte. Husk at sætte antallet af decimaler for værdien af integralet, da det ellers vises som 20.3 ☺. Du sætter antal decimaler op ved at højreklikke og vælge **attributter**.

3. Integralet som en sum*

Det sidste emne vi vil se på i dette kapitel er hvordan man kan illustrere integralet som en sum. Vi vil benytte en venstresum til illustrationen, men den kan sagtens udbygges til også at vise andre former for summer. Vi tager endnu engang udgangspunkt i grafen for femtegradspolynomiet

$$f(x) = \frac{1}{15}\cdot x^5 - \frac{1}{20}\cdot x^4 - \frac{2}{3}\cdot x^3 + \frac{1}{6}\cdot x^2 + 2x + 5$$

I grafvinduet skal vi nu udpege to punkter på x-aksen, der skal fungere som grænser for arealet. Vi bestemmer deres koordinater og lagrer førstekoordinaterne i variablene *a* og *b*. Endelig indfører vi en heltallig skyder *n*, der antager værdierne fra 1 til 20 i spring af 1. Den skal styre hvor mange delintervaller, vi opdeler integrationsintervallet [*a*;*b*] i. Da det er en diskret skyder med heltallige værdier minimerer vi den.



Vi skal nu have konstrueret delintervallerne. Da antallet af delintervaller er dynamisk konstruerer vi dem ud fra et **Lister og Regneark**-værksted. I dette regneark indfører vi listerne **x_int**, **y_int** og **nul**, der står for intervalendepunkternes *x*-værdier, deres *y*-værdier samt en hjælpeliste fyldt med nuller. Listerne opbygges ved hjælp af den såkaldte **Seq**-kommando (for Sequence), der som udgangspunkt tager en formel med en indeksvariabel, som gennemløber en række indeks-værdier.

Intervaltilvæksten Δx er givet ved $\dfrac{b-a}{n}$. De tre formler ser nu således ud

$$x\_\mathrm{int} := seq\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot i, i, 0, n\right), \text{ der udregner listen } \left\{a, a+\frac{b-a}{n}, a+\frac{b-a}{n}\cdot 2, \ldots, b\right\}$$

$$y\_\mathrm{int} := f1(x\_\mathrm{int}), \text{ der udregner listen } \left\{f1(a), f1\left(a+\frac{b-a}{n}\right), \ldots, f1(b)\right\}$$

$$nul := seq(0, i, 0, n), \text{ der udregner listen } \{0,0,0,\ldots,0\}$$

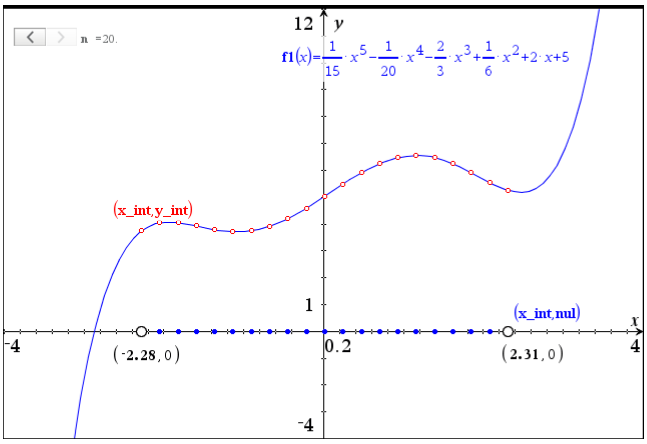
	A x_int	B y_int	C nul	D	E
=	=seq('a+('b−'a)/'n*i,i,0,'n)	=f1(x_int)	=seq(0,i,0,'n)		
1	-2.28213	3.74449	0		
2	-1.36426	3.7862	0		
3	-0.446395	4.19656	0		
4	0.471473	5.90921	0		
5	1.38934	6.47134	0		
6	2.30721	5.25551	0		
7					
8					
9					

A $x\_\mathrm{int} := seq\left('a+\frac{'b-'a}{'n}\cdot i, i, 0, 'n\right)$

Vi skal nu have tegnet de tilhørende rektangler og skal derfor overføre regnearkets lister til to passende punktplot:

(**x_int**, **nul**) og (**x_int**, **y_int**)

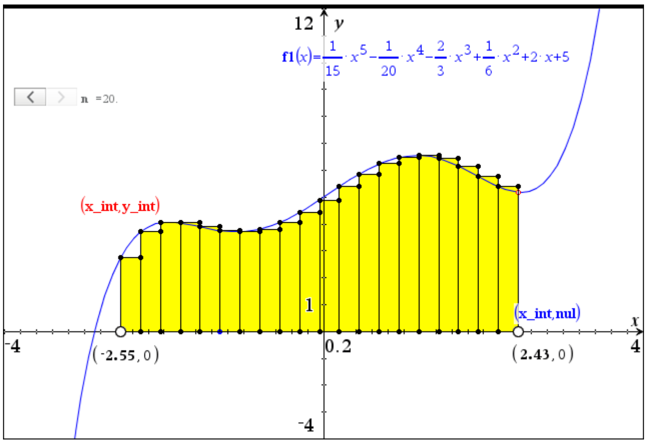
Herefter er det nu afgørende at vi skruer op for skyderen til dens maksimale værdi, så vi får tegnet alle rektanglerne!



Tip
Driller konstruktionen for meget kan man med fordel skifte funktionen midlertidig ud med en passende lineær funktion.

Vi trækker nu lodrette linjer gennem skillepunkterne og tilsvarende vandrette linjer gennem grafpunkterne. Herefter konstruerer vi skæringspunkterne hørende til venstresummen. Det kræver betydelig tålmodighed og man skal nok konstruere små portioner ad gangen og undervejs trække i grænsepunkterne for at få skilt punkterne tydeligt ad: Hvis de ligger i samme højde har de tendens til at falde sammen, så man ikke får klikket på de rette punkter ☺.

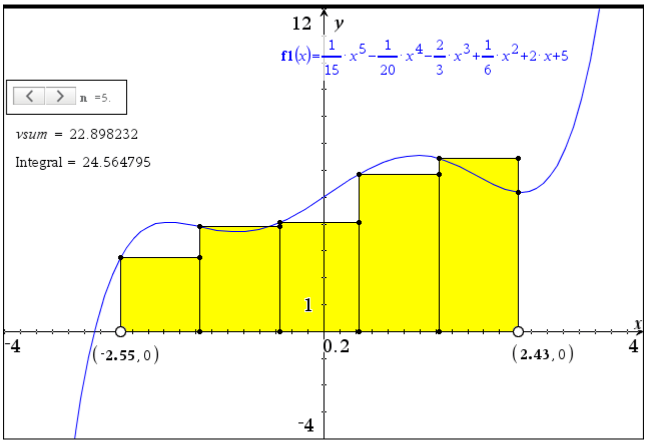
Til sidst trækkes rektanglerne op (som polygoner) og de farves gule.



Tilbage er der så blot at skjule punktplottene og tilføje værdien af venstresummen henholdsvis integralet. Venstresummen udregnes fx i regnearket som en celleformel:

$$D1 \quad \text{vsum}:=\text{sum}(\text{left}(\text{y\_int},\text{'n}))\cdot\frac{\text{'b}-\text{'a}}{\text{'n}}$$

Integralet udregnes nemt grafisk.



Har man overskud til det kan man nu tilføje højresummer, midtsummer osv. og udnytte **Betingelser** til at lade en skydervariabel vælge, hvilken type sum man vil have vist ☺