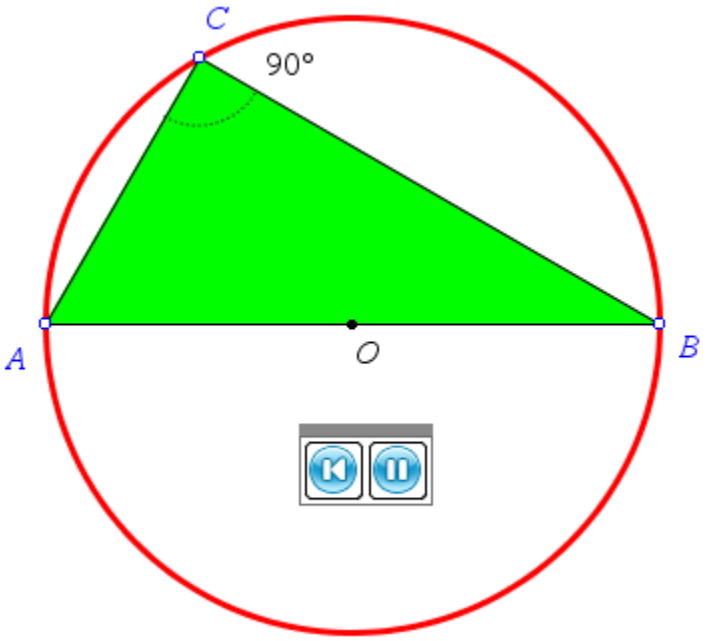
Introduktion til geometri med TI-Nspire CAS version 3.2



Midtsjællands Gymnasieskoler 2012-13

Materialet er udarbejdet af Brian Olesen
med assistance fra Bjørn Felsager.

Dynamiske geometriprogrammer

Dynamisk geometri dukkede op i gymnasieskolen i begyndelsen af 90'erne i forbindelse med en omfattende efteruddannelse i brugen af IT i undervisningen. I første omgang drejede det sig om det amerikansk udviklede program SketchPad og det fransk udviklede program Cabri. Begge blev senere implementeret på TI's CAS-lommeregnere (TI-92, TI-89). Først 10 år senere dukkede det første undervisningshæfte op: **Introduktion til Geometer**, forfattet af Bjørn Felsager og Mette Vedelsby. Det var bygget op som et arbejdshæfte med en tredelt struktur: Først en generel introduktion til værktøjerne, derefter en vejledning i konstruktion af trekanter med faste mål og endeligt udvalgte opgaver til at træne de indøvede færdigheder.

Da Haslev Gymnasium skiftede fra Geometer til **TI-Nspire CAS** opstod behovet for en tilsvarende introduktion til Geometri med TI-Nspire CAS. Vi bebeholdt da strukturen, som havde fungeret så godt som arbejdshæfte for både lærere og elever, men omsatte detaljerne til TI-Nspire CAS virkemåde.

Dynamiske geometriprogrammer virker efter forskellige principper: De er bygget op over en række objekter såsom punkter, linjer, cirkler osv. samt en række værktøjer til at oprette vinkelrette, finde midtnormaler osv. Men de kan nu opbygges efter to vidt forskellige principper: De kan være værktøjsorienterede eller objektorienterede.

Et dynamisk geometriprogram er **værktøjsorienteret**, hvis du frit kan vælge værktøjet og bagefter lede efter egnede objekter, som du kan anvende værktøjet på. Så du kan fx frit hente en sav og bagefter gå på jagt efter nogle brædder du kan save i. Tilsvarende kan du frit hente en hammer og bagefter gå på jagt efter nogle søm, der skal slås i. Når du leder efter objekter, vil kun de objekter, som værktøjet virker på, være aktive. I et dynamisk geometri program kan du altså altid hente et midtpunkts-værktøj, men du kan fx ikke anvende det på en cirkel.

Et dynamisk geometriprogram er **objektorienteret**, hvis du frit kan vælge objekter og bagefter lede efter egnede værktøjer, der virker på objekterne. Så du fx frit samle på brædder, og bagefter gå på jagt efter en sav. Tilsvarende kan du frit samle nogle søm og bagefter lede efter en hammer. Når du leder efter værktøjer, vil kun de værktøjer, som kan anvendes på objekterne, være aktive. I et dynamisk geometriprogram kan du altså altid udpege et punkt og en linje, men du kan ikke anvende det sammen med fx et vinkelhalveringsværktøj.

Begge strategier har fordele og ulemper. Men de gennemsyrer hele programmets virkemåde. SketchPad/Geometer er objektorienteret, mens Cabri er værktøjsorienteret. Det er Cabri, der ligger til grund for geometriværkstedet i **TI-Nspire CAS**, som derfor også er værktøjsorienteret.

Dertil kommer nogle specifikke karakteristiske valg i de enkelte dynamiske geometriprogrammer. Mens de er fælles om fx konstruktion af vinkelrette er måden de afsætter et linjestykke med en bestemt længde stærkt programafhængigt. Her følger **TI-Nspire CAS** strategien fra Cabri med at **Overføre en måling** til fx en halvlinje, en strategi, der er meget specifik for Cabri, og som man gør klogt i at gøre sig fortrolig med, hvis man vil løse klassiske trekantopgaver med **TI-NSpire CAS**. Men alt dette lærer man altså stille og roligt ved at gennemarbejde det foreliggende hæfte.

Indhold

FØRSTE DEL – INTRODUKTION TIL GEOMETRI MED TI-Nspire CAS

1 Introduktion til værktøjerne 3

Klik-Flyt-Klik 4

Eksempel 1.1 Tegn en cirkel 4

Eksempel 1.2 Tegn et linjestykke 5

Markér 5

Eksempel 1.3 Flyt rundt på et linjestykke 5

Eksempel 1.4 Tegn en trekant 6

Skift mellem programmer 7

Eksempel 1.5 Skift mellem TI-Nspire CAS og Paint 7

Klippe-Klistre 8

Eksempel 1.6 Kopier en trekant 8

2 Indledende øvelser 9

Øvelse 2.1 Konstruktion og opmåling af trekanter 9

Øvelse 2.2 Konstruktion og opmåling af en firkant 12

3 På opdagelse med Geometri i TI-Nspire CAS 13

Øvelse 3.1 Vinkel, der spænder over en diameter i en cirkel 13

Øvelse 3.2 Periferivinkler 16

Trekantskonstruktioner 17

Konstruktion af målfaste linjestykker 17

Eksempel 1.1 Konstruktion af linjestykker med en bestemt længde 17

Eksempel 1.2 Første trekantstilfælde 18

Konstruktion af målfaste vinkler 21

Eksempel 1.3 Andet trekantstilfælde 21

Eksempel 1.4 Fjerde og femte trekantstilfælde 22

Eksempel 1.5 Tredje trekantstilfælde 23

Problem 1.1 En matematisk orienteringstur 24

Problem 1.2: Landmåling 24

Problem 1.3 Stempelslag 25

Problem 1.4: Skattejagt 26

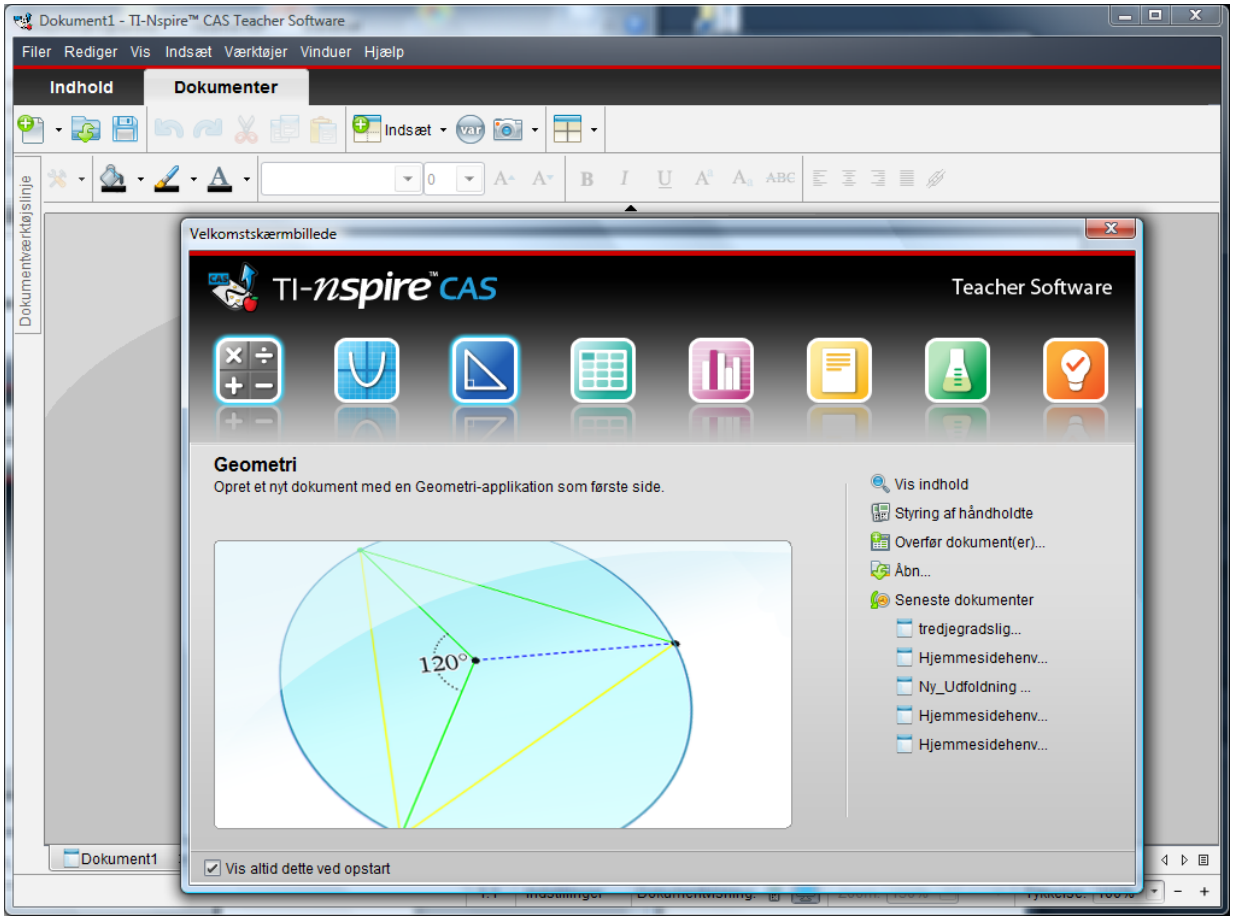
Problem 1.5: Vivianis problem 27

Problem 1.6: Varignons problem 27

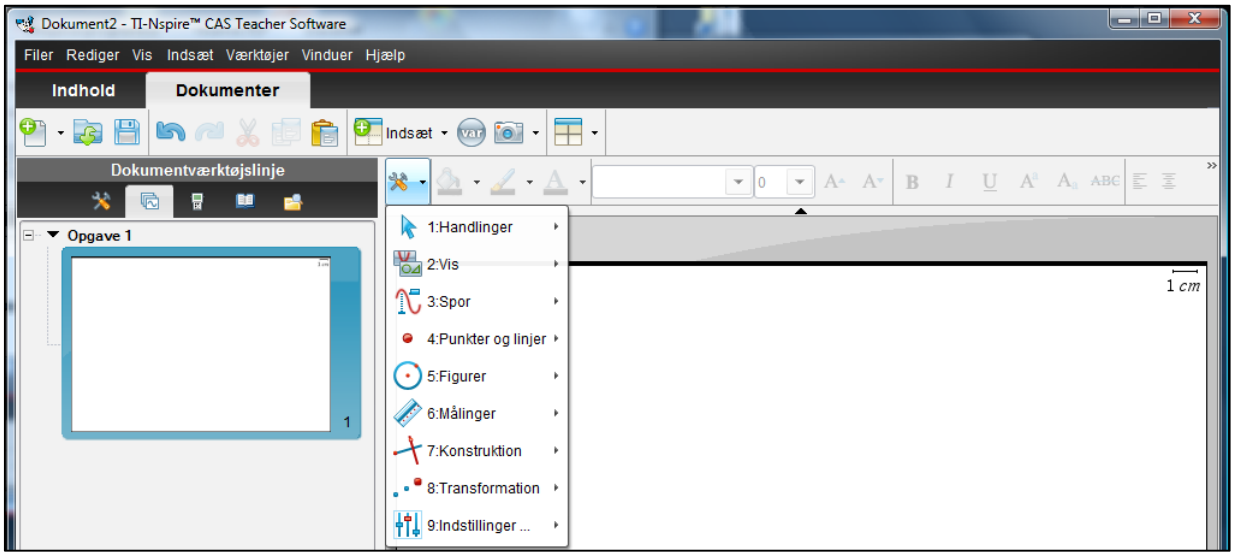
FØRSTE DEL – INTRODUKTION TIL GEOMETRI MED TI-NSPIRE CAS

1 Introduktion til værktøjerne

Åben programmet TI-Nspire CAS og indsæt et **Geometri**-værksted fx fra Lynstart i **Velkomstskærmbilledet**:



Helt til venstre i menubjælken (eller samme sted i sidepanelet) får man adgang til alle de værktøjer, der knytter sig til dette værksted:



I denne introduktion skal du arbejde med nogle af disse værktøjer. Især værktøjer fra **Handlinger**, **Punkter og Linjer**, **Figurer**, **Målinger**, **Konstruktion** og **Transformation** er vigtige. Prøv at klikke på menulinjerne for at se hvilke værktøjer der er til rådighed.

Klik-Flyt-Klik

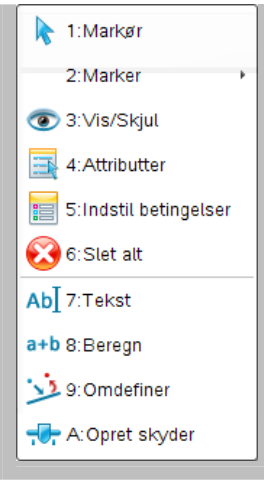
Det er en almindelig Windowsteknik, at man klikker med musen et sted, flytter musen hen over skærmen, og derefter klikker med musetasten et nyt sted. Teknikken bruges bl.a. til at tegne cirkler og linjer.

Eksempel 1.1 Tegn en cirkel

A. Vælg **Cirkel**-værktøjet i **Figurer**-menuen og tegn en cirkel ved først at klikke i centrum af cirklen og dernæst trække cirklen ud til den ønskede størrelse, hvorefter du klikker igen. Det svarer helt til at bruge en passer, hvor du sætter første passerben i centrum, det andet i et randpunkt, og dernæst svinger passeren rundt.

B. Cirkelkonstruktionen kan godt benytte sig af tidligere afsatte punkter; Vælg **Punkt**-værktøjet i **Punkter og linjer**-menuen og afsæt to punkter i tegnefladen helt uafhængigt af den cirkel du konstruerede i **A**. Vælg dernæst **Cirkel**-værktøjet og klik først i det ene punkt, der kommer til at fungere som centrum og derefter i det andet punkt, der kommer til at definere radius for cirklen.

Pas på, at du klikker med musen præcis oven i det andet punkt. Hvis du bare trækker i cirklen, så det ser ud som om cirklen går gennem det andet punkt, har du ikke løst opgaven korrekt. Så har du nemlig kun frembragt en tegning, der ligner, men ikke en *dynamisk* konstruktion, der rent faktisk binder cirklen til de to punkter. Du kan selv kontrollere om du har gjort det rigtigt ved at vælge **Markør**-værktøjet i **Handlinger**-menuen og trække i de to punkter, som du afsatte for cirklen. Cirklen skal følge med – ellers har du gjort det forkert og må starte forfra igen. Læg også mærke til at **Markør**-værktøjet er standard-værktøjet, så du kan altid komme tilbage til **Markør**-værktøjet ved at taste **ESC**, når du har brugt et andet værktøj, fx et **cirkel**- eller et **linjestykke**-værktøj.

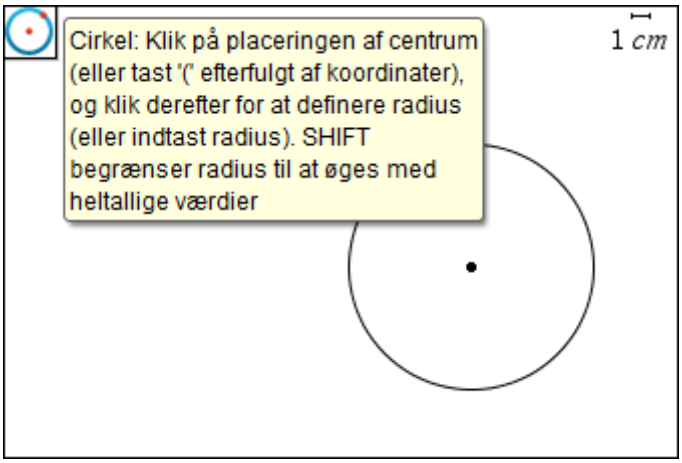


Bemærk at du kan se om du er i færd med at konstruere en *dynamisk* tegning, idet punkterne der udgør henholdsvis centrum og randpunkt på cirklen "svulmer op", når du fører markøren til punkterne og ud for punktet står der **punkt**.

C. Endelig kan cirkelkonstruktionen benytte sig af en bestemt radius; Vælg igen Punkt-værktøjet i **Punkter og Linjer**-menuen og afsæt centrum. Tast derefter et tal fra computerens tastatur. Der dukker da automatisk et tekstfelt pop med tallet. Når du taster **ENTER** tegnes cirklen nu med det valgte centrum og den indskrevne radius. Hvis du ændrer tallet i tekstfeltet ændres radius for cirklen tilsvarende.

Bemærk desuden symbolet i øverste venstre hjørne som viser, at du har valgt **cirkel**-værktøjet. Flyt musen hen over symbolet for at få et vejledning til hvorledes værktøjet anvendes. I øverste højre hjørne finder du et skaleringsværktøj som her består af et linjestykke på 1 cm. Du kan redigere enheden til fx mm (enheden er brugerdefineret, så der

er helt frit valg) og længden af linjestykket til en vilkårlig anden værdi. Du kan endda - med måde - trække i skalasymbolet og ændre dets længde:



NB! Du kan dog ikke anvende koordinater i **Geometri**-værkstedet. Det virker kun i **Grafer**-værkstedet, fordi det forudsætter et koordinatsystem.

Eksempel 1.2 Tegn et linjestykke

A. Vælg **Linjestykke**-værktøjet og tegn et linjestykke ved at først at klikke, der hvor linjestykkets ene endepunkt skal afsættes og dernæst klikke, der hvor linjestykkets andet endepunkt skal afsættes.

B. Linjestykkekonstruktionen kan benytte sig af tidligere afsatte punkter: Vælg **Punkt**-værktøjet og afsæt to punkter. Vælg dernæst **Linjestykke**-værktøjet og klik i det ene punkt, der kommer til at fungere som første endepunkt. Klik derefter i det andet punkt, der kommer til at fungere som det andet endepunkt for linjestykket. Ligesom ved cirklen skal du være omhyggelig og klikke med musen præcist oven i punkterne.

C. Læg mærke til, at du nemt kan afsætte *vandrette eller lodrette linjestykker* ved at holde **SHIFT**-tasten nede, mens du afsætter det andet endepunkt.

Markér

Vælger man **Markør-**værktøjet kan man markere et enkelt objekt ved at klikke på det. Man markerer tilsvarende en serie af objekter ved at klikke på dem efter tur. Klikker man ved siden af objekterne på skærmen fravælges alt – man afmarkerer derfor ved at klikke i et tomt område af tegneplanen. Endelig kan man vælge flere objekter på en gang ved hjælp af **Marker** menupunktet. Det kan fx fås frem ved at højreklikke. Man indhegner da gruppen af objekter ved at trække et rektangelformet indhegningsområde.

Eksempel 1.3 Flyt rundt på et linjestykke

A. Sørg for at der er tegnet nogle linjestykker og cirkler på skærmen. Vælg **Markør**-værktøjet. Klik fx på et linjestykke og læg mærke til, at linjestykket nu blinker som tegn på, at det er blevet markeret. Træk rundt med linjestykket og slip det et andet passende sted.

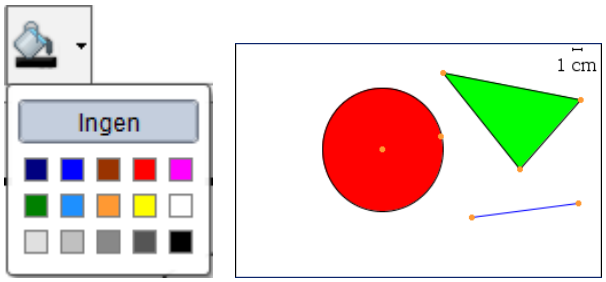
B. Markér dernæst to linjestykker. Grib fat i det ene og træk det rundt på skærmen. Læg mærke til, hvordan det andet følger med.

Eksempel 1.4 Tegn en trekant

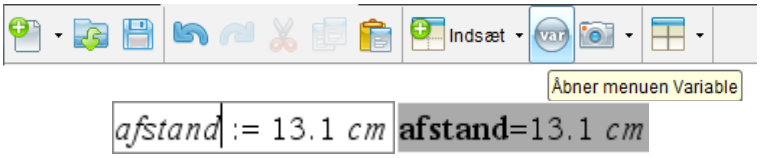
A. Afsæt en trekant, idet du bruger **Trekant**-værktøjet fra **Figurer**-menuen, hvor du efter tur klikker i de tre hjørner. Markér et trekantshjørne med **Markør**-værktøjet (musen!). Træk hjørnet rundt på skærmen. Hvad følger med?

B. Markér derefter hele trekanten (ved at klikke på en trekantside) og træk trekanten rundt på skærmen. Læg mærke til forskellen fra før.

Læg mærke til, at du kan farvelægge dine konstruktioner ved enten at højre-klikke på dem og vælge hhv. **Linjefarve** og **Udfyldningsfarve** eller ved at markere dem og bruge farve-værktøjerne i **menu**-bjælken. Der er 16 farver til rådighed som kan vælges fra den tilhørende palette.



Bemærkning: Du kan endda lege med *betingede farvelægninger*. Hvis du fx vil lege 'Tampen brænder' kan du oprette et punkt og en cirkel. Vælg derefter Længde fra Målinger og menuen og klik på de to punkter, så du får udmålt afstanden. Afstanden skal nu lagres som en variabel, så vi kan referere til den. Fx kan du klikke forsigtigt på målingen så den markeres (men uden at du kommer helt ind i tekstboksen) og derefter trykke på **VAR**-tasten i Windows-menuen. Så får du mulighede for at gemme målingen som en variabel vi kalder **afstand**.



Variabelnavnet skrives da med **fedt** på skærmen. Du kan nu vælge betinget farvelægning, dvs. **Indstil betingelser** fra **Handlinger**-menuen:

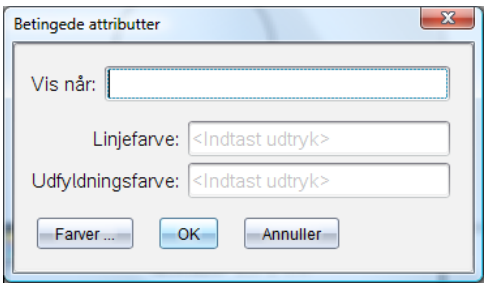
Du kan da sætte betingelsen til

Afstand < 5

Linjefarven til 15, dvs. farvekoden for **sort** og udfyldningsfarven til 7, dvs. farvekoden for **rød** (se farve-koden ved at taste **Farver...**).

Du får da kun cirklen at se, når du flytter søgepunktet inden for en afstand af 5 cm fra cirklens centrum.

Betinget farvelægning er en uhyre nyttig mulighed, når man skal lave fx præsentationer, hvor figurer skal dukke op trinvis.

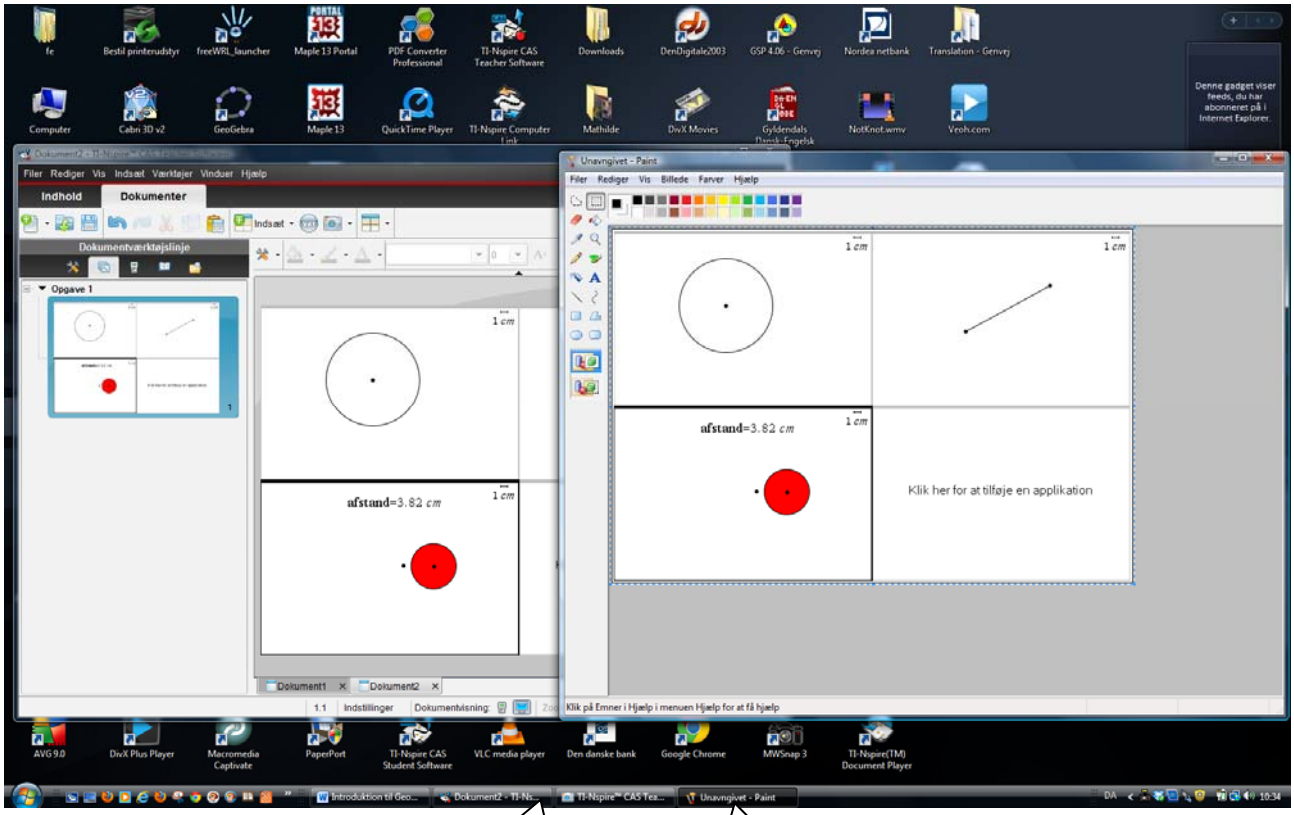


Skift mellem programmer

Man kan åbne et nyt program ved hjælp af startmenuen, der altid er tilgængelig på den nederste værktøjsbjælke: **Windowsbjælken** – hvis den ikke er synlig skal du blot flytte musen helt ned til bunden af skærmen. Så dukker den op af sig selv. Man skifter mellem forskellige programmer ved at klikke på deres navne, som dukker op nederst på bjælken – også når de ikke er aktive (genvej: **Alt+Tab** eller **Windowtast+Tab**).

Eksempel 1.5 Skift mellem TI-Nspire CAS og Paint

Find menupunktet **start ► Programmer** på Windowsbjælken og luk op for **Paint** (som du finder under **Tilbehør**). Når du har fået åbnet **Paint**, vender du igen tilbage til **TI-Nspire CAS** ved at klikke på dets navn på Windows-bjælken nederst på skærmen. På det næste billede ser du et eksempel, hvor du kan se at **Paint** og **TI-Nspire CAS** er åbnet:



TI-Nspire CAS er inaktiv men kan hurtigt bringes i spil ved tryk på knappen.

Det er **Paint**, der er aktiv, idet knappen er trykket ned!

Skærmbillede er taget. Vis det.

Bemærk: I **TI-Nspire CAS** er det nemt at lave skærmbilleder ved at trykke på ikonen med kameraet. Skærmklippet kan herefter fra udklipsholderen gemmes eller kopieres. Men det kan også som vist indsættes direkte i **Paint**, hvor det er nemt at foretage hensigtsmæssige beskæringer af billedet, hvorfra de igen kan sættes tilbage i **TI-Nspire CAS** i **Noter**-værkstedet, hvor man med fordel skriver sine kommentarer.

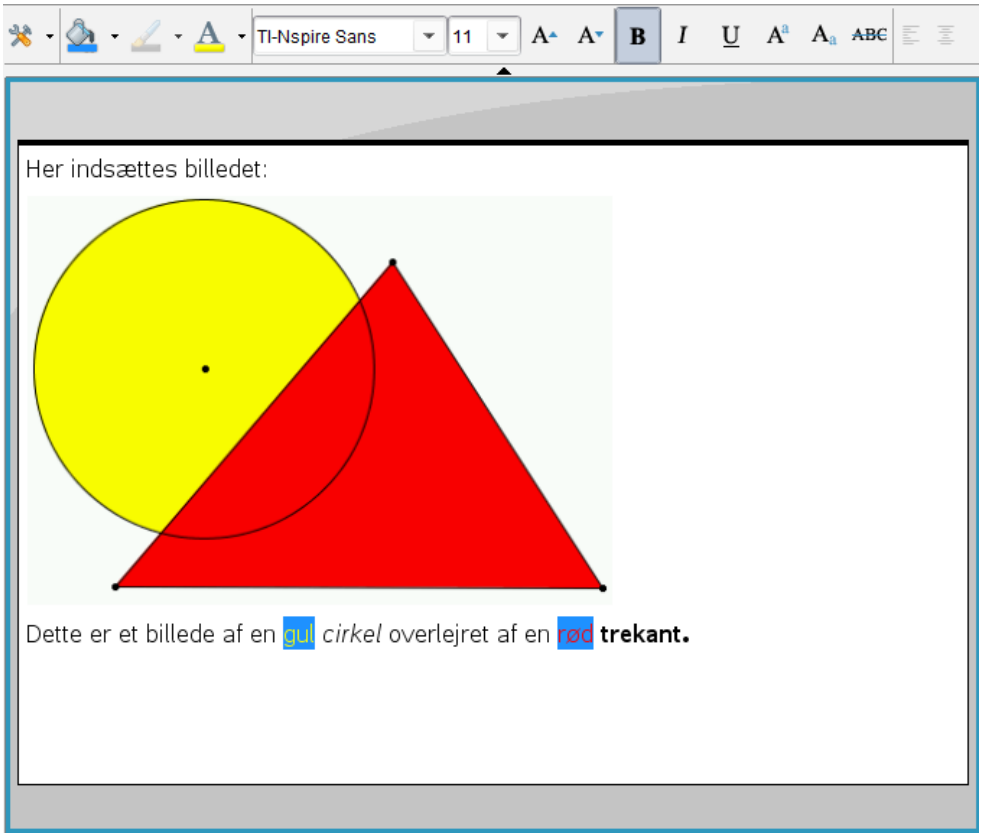
Klippe-Klistre

En anden styrke ved Windows er, at man nemt kan klippe og klistre mellem to programmer i Windows. Man kopierer ved at trykke **Ctrl-C** (for **Copy/kopier**) og man klistrer ved at trykke på **Ctrl-V** (dvs. **Paste/Indsæt** – læg mærke til, at V-tasten ligger ved siden af C-tasten på tastaturet).

Bemærkning: Man kan selvfølgelig også bruge klippe-klistre internt i **TI-Nspire CAS**. Man kan dog *ikke* kopiere et geometrisk objekt. Får man brug for flere kopier af fx den samme trekant indenfor tegneplanen må man i stedet parallelforskyde trekanten.

Eksempel 1.6 Kopier en trekant

A. Lav et skærmklip af en cirkel og en trekant i **TI-Nspire CAS** ved at trykke på ikonen med kameraet . Indsæt billedet i **Paint** og vælg et passende udsnit. Skift derefter til **Noter**-værkstedet. Indsæt skærmklippet ved at taste **Ctrl-V**. Forsyn trekanten med en overskrift og en efterfølgende kommentar: ”Dette er et billede af en gul cirkel overlejret af en rød trekant” osv.

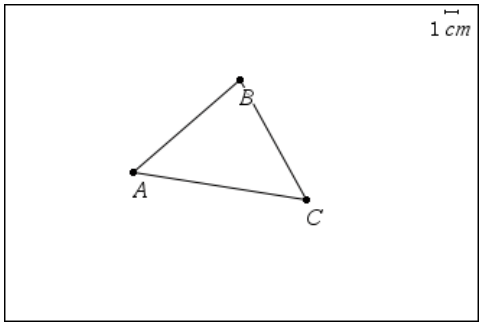


B. Fremstil en trekant i **TI-Nspire CAS**. Tegn også en vektor, dvs. et orienteret linjestykke, der vises på skærmen som en pil. Du finder **vektor**-værktøjet i **Punkter og Linje**-menuen. Parallelforskyd nu trekanten ved hjælp af **parallelforskyd**-værktøjet fra **Transformation**-menuen ved at klikke på vektoren og trekanten. Skjul nu forskydningsvektoren og benyt **tekst**-værktøjet til at forsyne den oprindelige trekant med teksten ”Dette er en trekant!”. Forsyn dernæst kopien med teksten ”Dette er en kopi af trekanten!”. Kopier nu begge trekanter ind i **Noter**.

2 Indledende øvelser

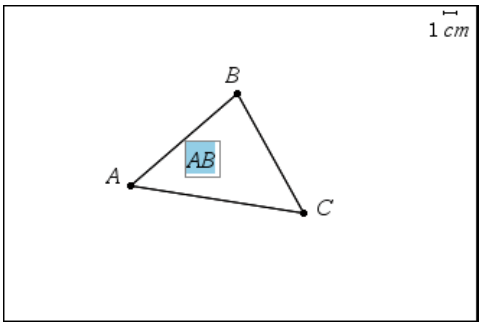
Øvelse 2.1 Konstruktion og opmåling af trekanter

Vælg **Trekant**-værktøjet fra **Figur**-menuen og afsæt de tre hjørner i tegnefeltet. Hjørnerne forsynes med navnene *A*, *B* og *C*. Den letteste måde at gøre dette på er ved *umiddelbart* efter at have afsat et punkt at skrive navnet på punktet direkte fra tastaturet. Alternativt kan punkterne navngives efter de alle er afsat ved at vælge **Tekst**-værktøjet fra **Handlinger**-menuen og herefter på skift udpege punkterne for at navngive dem. Du kan også bare højreklikke på punkterne og vælge menupunktet **Navngiv**.



Du kan skjule navnet igen ved at højre-klikke på navnet og vælge **Skjul**. Hvis du ikke er tilfreds med placeringen af navnet kan du flytte rundt på det ved at gribe fat i det med **Markør**-værktøjet (men du må ikke flytte objektets navn ret langt væk fra objektet, hvis det skal følge med når du trækker rundt på skærmen med objektet).

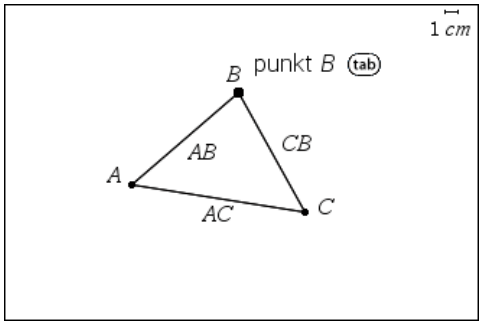
Vælg **Markør**-værktøjet. Klik herefter på et af punkterne, fx *A* og flyt det rundt på skærmen med musen. Læg mærke til, at de to andre punkter ikke flytter sig. De er *uafhængige* punkter, dvs. der er ingen andre punkter, der bestemmer over dem. Klik derefter på et af de andre punkter, og flyt det rundt på skærmen.

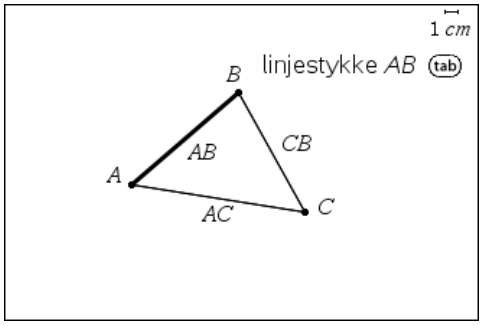


Hvis du vil navngive de enkelte sider i trekanten må du lægge linjestykker hen over siderne. Vælg dernæst **Tekst**-værktøjet og klik på skift på de enkelte linjestykker – eller højreklik på linjestykket og vælg **Navngiv**. Som det ses foreslås automatisk navnet *AB*. Linjestykket er et *afhængigt* objekt og kan derfor med fordel opkaldes efter de uafhængige objekter, det afhænger af. Skal man regne på trekanten er det et heldigt valg, da **TI-Nspire CAS** ikke skelner mellem store og små bogstaver, hvorfor det er problematisk at give siden navnet *c*.

Grib fat i et af trekantens hjørner og træk rundt med det på skærmen. Igen bliver de to andre punkter liggende, men denne gang flytter linjestykkerne med. De er *afhængige* objekter, dvs. de er afhængige af placeringen af punkterne *A*, *B* og *C*.

Bemærkning: Trekanten er efterhånden et kompliceret objekt opbygget af flere lag. Når man fører musen hen til et hjørne kan det derfor sommetider være svært at ramme hjørnepunktet umiddelbart, da der jo også ligger sider og selve trekanten det samme sted på skærmen:

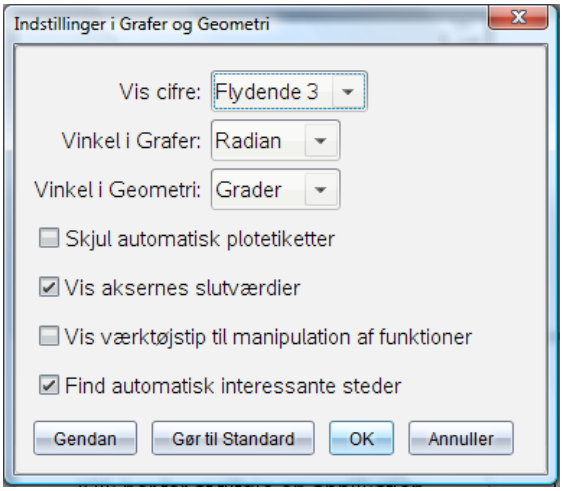


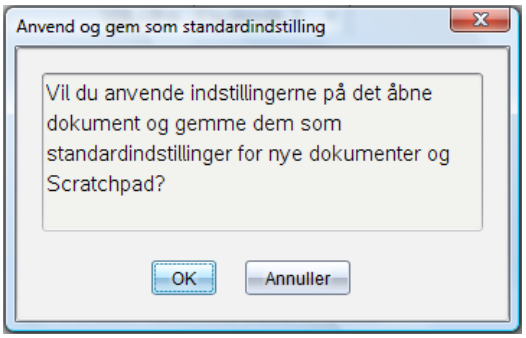


Når der er flere valgmuligheder vises det med **TAB**-symbolet. Ved at klikke på tabulatortasten på tastaturen skifter man nu mellem de forskellige valgmuligheder.

A. Trekantens vinkler

Inden du forlader trekanten skal der lige foretages nogle observationer/målinger. Før dette skal man dog sikre sig at programmet er sat rigtigt op. Det sker ved at vælge menupunktet **Indstillinger** i **Indstillinger**-menuen:

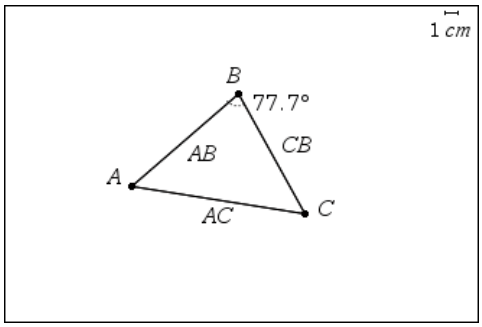


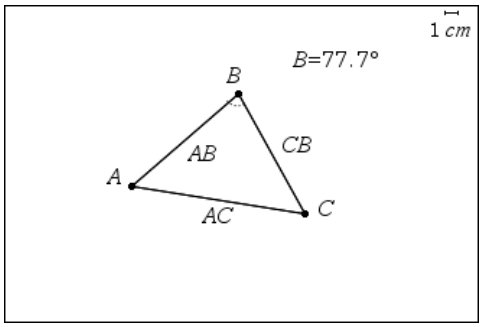


Vinkler kan måles både i radianer, grader og nygrader. I den elementære geometri er det vigtigt, at **Geometri**-værkstedet måler i **grader**. Indstillinger kan ændres og anvendes på systemet ved at vælge **Gør til Standard** således, at alle fremtidige dokumenter vil have disse nye indstillinger.

Du skal først måle vinkel *B* i trekanten. Vælg **Vinkel**-værktøjet i **målinger**-menuen og marker de tre punkter *A*, *B* og *C* i den nævnte rækkefølge, dvs. først klikker du på et punkt på det ene vinkelben, derefter på vinklens toppunkt og endelig på et punkt på det andet vinkelben!

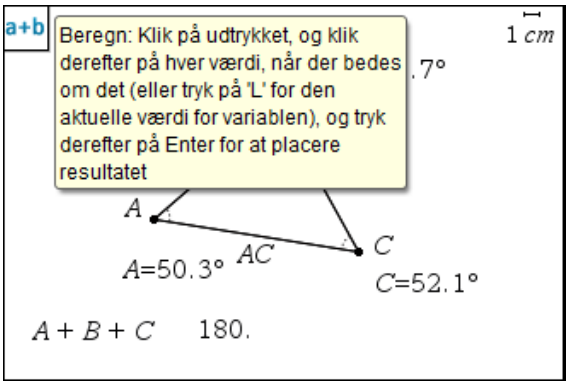
Du kan give vinkel-tallet et navn ved at dobbelt-klikke på målingen med **Markør**- eller **Tekst**-værktøjet og fx skrive *B* **=** foran vinkeltallet. Dette er blot en navngivning af vinkelmålet. Selve målingen er *ikke* lagret som en variabel endnu!

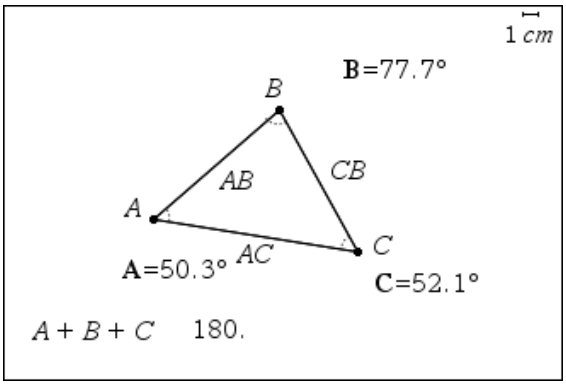




Find nu på samme måde størrelsen af vinklerne *A* og *C*.

Du kan nu kontrollere vinkelsummen af trekanten. Vælg **Tekst**-værktøjet (genvej via højre-klik i tegnefladen) og skriv $\boxed{A + B + C}$ i tekstboksen. Vælg herefter **Beregn**-værktøjet ved fx at højre-klikke i tekstboksen og klik efter tur på hver af de tre vinkel-tal. Afslut med at klikke der, hvor beregningen skal placeres i tegnefladen. Du kan også som vist vælge **Beregn**-værktøjet fra **Handlinger**-menuen og få lidt hjælp ved at flytte musen hen over **Beregn**-ikonet i øverste venstre hjørne

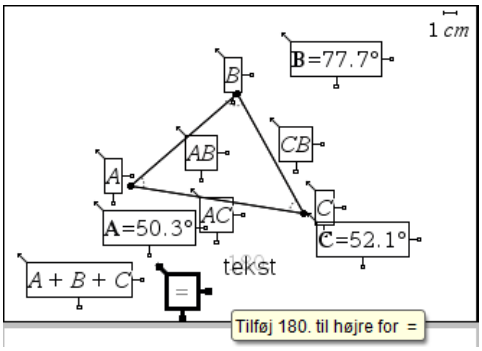


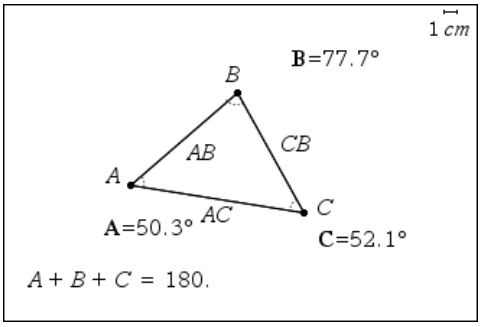


Prøv derefter at trække i trekanten i et af hjørnerne. Hvad observerer du?

Bemærkning: Hvis du havde lagret vinkelmålingerne som variable kunne du under beregningen bare have tastet L (for listen af variable) på tastaturet i stedet for at udpege vinkeltallet. Du lagrer en måling ved at markere målingen og trykke på VAR-tasten i Windowsmenuen. I så fald skrives navnet på målingen i **fed** skrift.

Du kan også skrive beregningen pænt på skærmen ved at tilføje en tekstboks med et lighedstegn, højreklikke på tallet og vælge **Sammenkæd tekst**. Derefter højreklikkes på lighedstegnet, der sammenkædes med tekstboksen $\boxed{A + B + C}$:





B. Trekantens areal

Trekantens areal kan findes på to forskellige måder, idet man kan lade **TI-Nspire CAS** finde det direkte ved en måling eller man kan selv beregne arealet.

Måling af arealet: Højreklik på trekanten og vælg **Areal**-menupunktet.

Bemærkning: Det er ikke muligt at måle arealet af en "lukket" figur konstrueret af linjestykker. For at måle arealet skal figuren konstrueres ved hjælp af værktøjerne fra **Figurer**: **Cirkel**, **Trekant**, **Løst Rektangel**, **Polygon**, **Reg. Polygon** og **ellipse**.

Beregning af arealet: Det kan ske ved at benytte den velkendte formel:

Areal = ½ × højde × grundlinje.

Udfordring: Find selv ud af, hvordan man bestemmer længden af grundlinjerne henholdsvis højderne for din trekant ved hjælp af bl.a. **Længde**-værktøjet, og kontrollér arealet ved udregning.

Vink: Man kan finde længden af en højde ved at måle den som afstanden fra et hjørne (punkt) til den modstående side (linjestykke). Husk at man med **TAB**-tasten på tastaturet skifter mellem markering af forskellige objekter, som fx **trekant ABC**, **punkt C**, **linjestykke c** og **linjestykke b**.

Øvelse 2.2 Konstruktion og opmåling af en firkant

A. Konstruér en firkant *ABCD*. Firkanten konstrueres ved hjælp af **Polygon**-værktøjet ved først at klikke på hvert af de fire hjørner i rækkefølge rundt langs kanten af figuren og herefter klikke på det hjørne der blev udpeget <u>først</u>, fx **B**, **C**, **D**, **A** og **B**. Man kan også dobbeltklikke på det afsluttende punkt for at lukke konstruktionen.

B. Udmål de fire vinkler *A*, *B*, *C* og *D*.

C. Bestem vinkelsummen: $A + B + C + D$

D. Flyt rundt på punkterne (gerne vildt!) og hold øje med vinkelsummen. Hvad observerer du? Hvordan ser en "vild" firkant ud? Skitsér et par stykker sammen med en "normal" firkant.

E. Hvad er egentlig den "sande" vinkelsum i en firkant? Og hvad er det, der snyder programmet, når firkanten bliver for "vild"?

F. Bestem også arealet af firkanten.

Udfordring

Hvordan bærer du dig ad med selv at beregne arealet af en firkant?

3 På opdagelse med Geometri i TI-Nspire CAS

Vi slutter introduktionen med to eksempler på, hvordan man kan gå på opdagelse med **Geometri**-værkstedet i **TI-Nspire CAS** og selv finde nye uventede sammenhænge – i det følgende finder vi således to klassiske sætninger med vinkler.

Øvelse 3.1 Vinkel, der spænder over en diameter i en cirkel

Konstruér en cirkel med den tilhørende diameter.

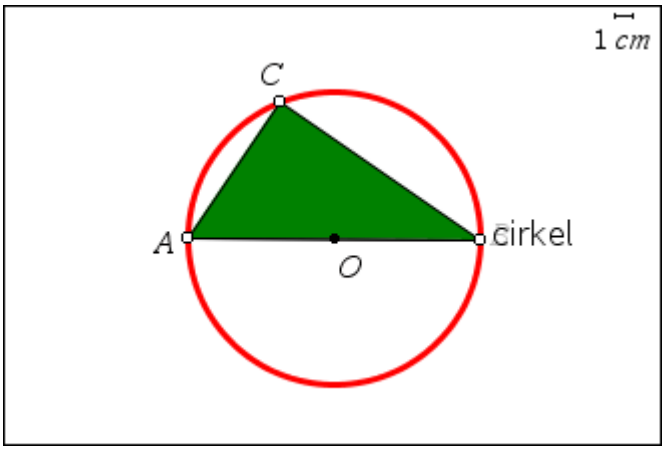
A. Konstruér først et linjestykke *AB*, der skal fungere som diameter for cirklen. Sæt betegnelser på løbende, ved hjælp af **Tekst**-værktøjet (eller højreklik og **Navngiv**).

B. Konstruér dernæst midtpunktet *O* for linjestykket *AB* ved hjælp af værktøjet **Midtpunkt** fra **Konstruktion**-menuen.

C. Konstruér nu cirklen med centrum i *O* og diameteren *AB* ved at vælge **Cirkel**-værktøjet og klikke på centrum *O* efterfulgt af et randpunkt: *A/B*. Igen skal du være omhyggelig med at udpege punkterne, der fremhæves når du har fat i dem.

Til sidst skal du konstruere en vinkel i cirklen, der spænder over diameteren.

D. Konstruér fx en trekant *ABC*, hvor også *C* ligger på cirklen ved hjælp af **Trekant**-værktøjet.

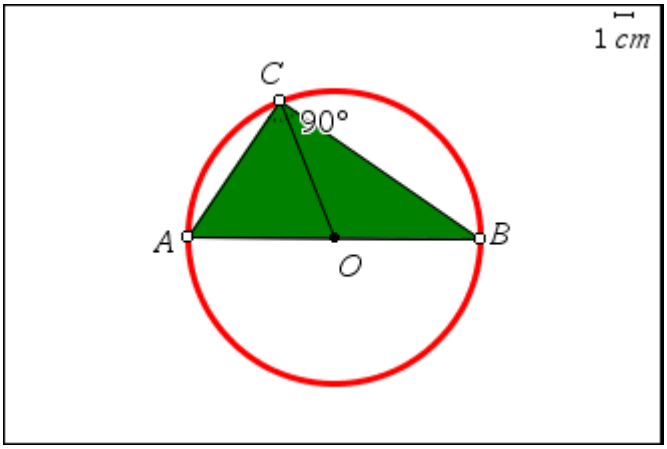


Du skulle nu gerne have konstrueret en figur, der ser nogenlunde således ud, hvor vinklen *C* altså spænder over en diameter. Du ændrer linjetykkelse ved at højreklikke og vælge **Attributter**. Du skifter farve ved at markere objektet og udnytte farvemenuerne i værktøjsbjælken over tegneplanen.

Kontrollér at figuren hænger ordentlig sammen, ved at trække i punkterne *A*, *B* og *C*.

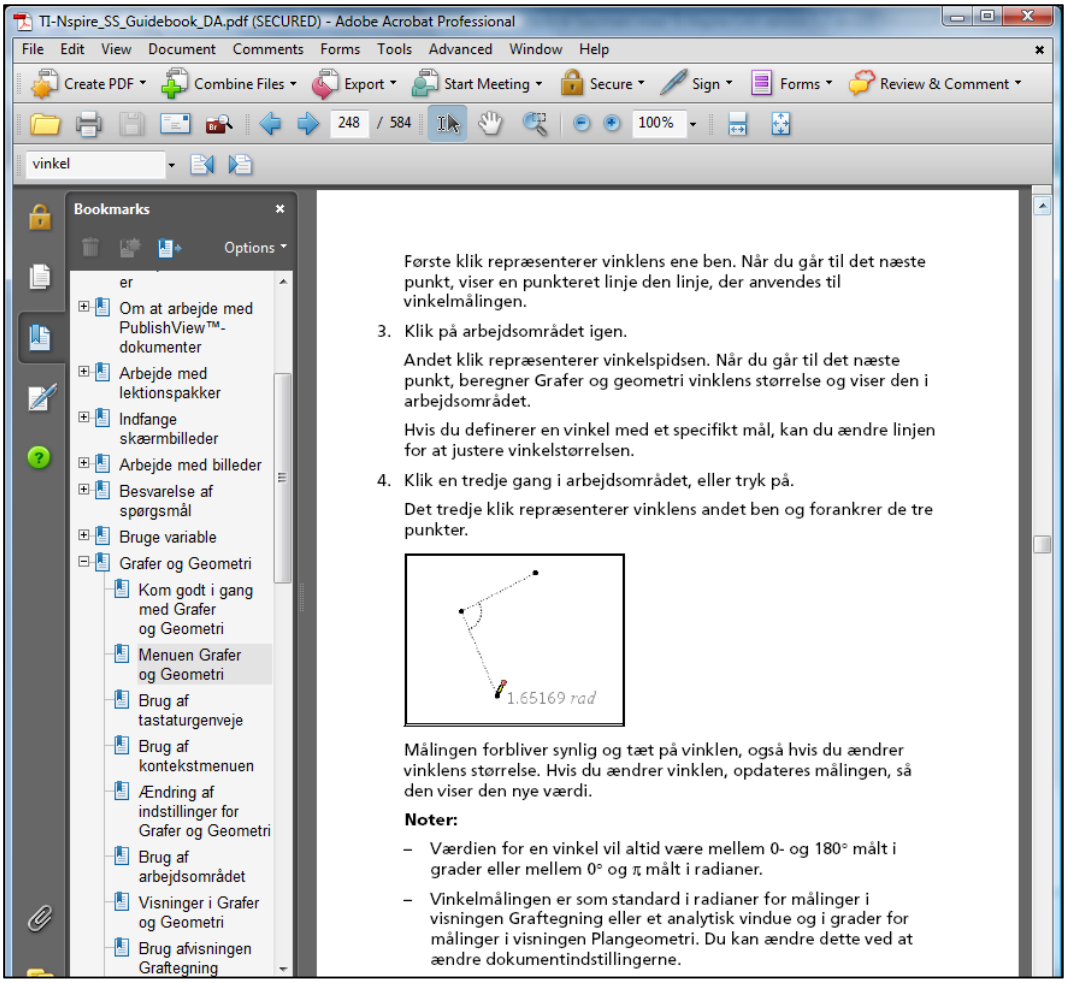
E. Mål størrelsen af vinklen *C* ved at vælge **Vinkel** i **Målinger**-menuen og herefter klikke på punkterne *A*, *C* og *B* i den nævnte rækkefølge, dvs. vinklens toppunkt *C* som det midterste punkt.

Flyt nu rundt med punktet C på cirklen. Hvad observerer du? Overvej og begrund dit resultat.



Vink: Træk en radius fra C til centrum O. Hvilke vinkler, går igen på figuren? Udtryk alle vinklerne ved hjælp af vinklerne A og B. Benyt nu sætningen om vinkelsummen i en trekant.

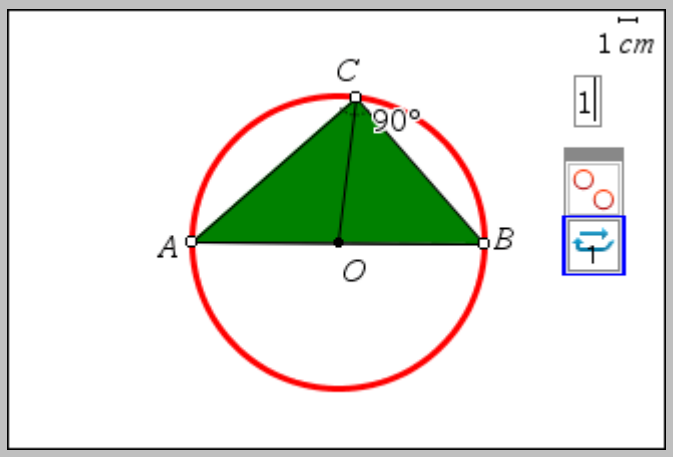
Bemærkning: Sætningen er en af de allerældste sætninger i geometriens historie og går tilbage til den græske matematiker Thales fra omkring 600 fvt., dvs. den er mere end 2.500 år gammel ☺



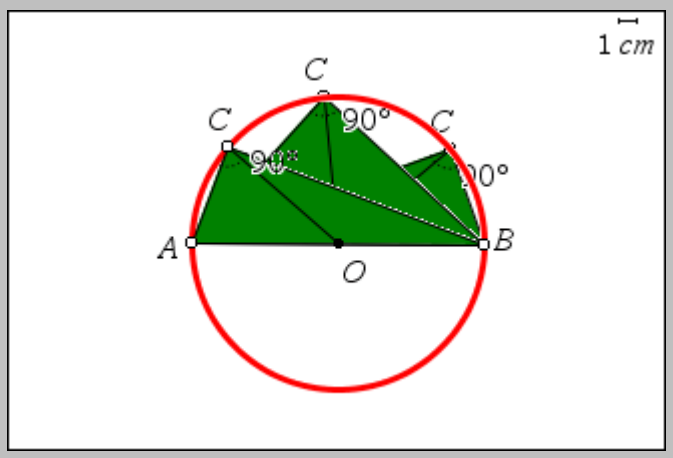
Bemærkning: Måling af vinkler kan være lidt tricket, fordi det skal ske gennem tre punkter og ikke fx ved at udpege vinkelbenene. Hvis du arbejder på en computer, der er opkoblet til internettet kan du imidlertid som vist søge **Online-hjælp** ved hjælp af **Hjælp**-menuen. Det giver adgang til et omfattende hjælpedokument, der vises som en pdf-fil, du derfor også bare kan downloade og arbejde med off-line.

En animation

Punktet *C* på cirklen kan også bevæge sig rundt på cirklen automatisk. Det gøres nemmest på følgende måde: Vælg **Attributer**-værktøjet og klik herefter på punktet *C*. Klik herefter animationsikonet og skriv et tal mellem **1** og **12** for at angive en hastighed. Herefter vil punktet kører rundt på cirklen i positiv omløbsregning (mod uret) med den angivne hastighed.



Klikker du herefter i tegnefladen udenfor figuren dukker et animationspanel op . Animationspanelet fungerer som fjernbetjening for en video idet **play**-knappen starter animationen og **pause**-knappen standser animationen midlertidigt. Med knappen nulstilles animationen.



Animationspanelet fjernes ved at taste tallet 0 som hastighed via **Attributter** som også fås som genvej ved at højreklikke på punktet *C*. Det er nemmest at fange punktet, hvis du først nulstiller animationen ☺

Øvelse 3.2 Periferivinkler

I denne øvelse skal du undersøge sammenhængen mellem de to vigtigste typer af vinkler i en cirkel: Centervinklerne og periferivinklerne.

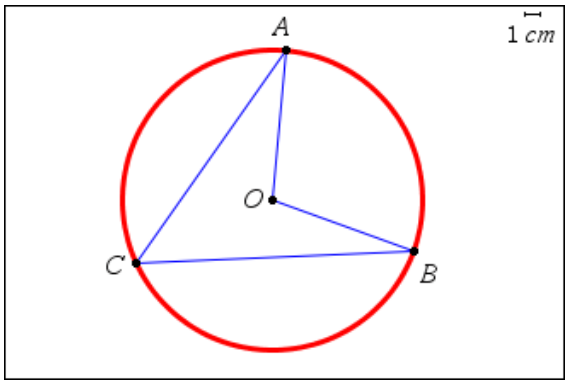
A. Tegn en passende cirkel med centrum i punktet *O*.

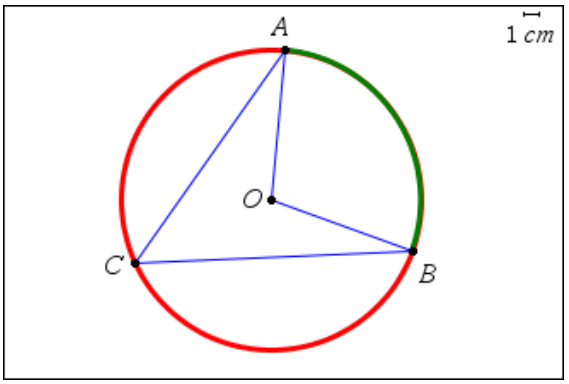
B. Konstruér derefter tre punkter *A*, *B* og *C* på cirklen.

C. Konstruér nu linjestykkerne *CA* og *CB* ved at forbinde de to punkter *A* og *B* med det tredje punkt *C*.

D. Konstruér til sidst de to linjestykker *OA* og *OB* ved at forbinde de to punkter *A* og *B* med cirklens centrum *O*.

Du skulle nu gerne have konstrueret en figur, der ser nogenlunde således ud:





Bemærkning: Du kan tilføje vinkelbuen ved at konstruere cirkelbuen $\overset{\frown}{AB}$ ved hjælp af **Cirkelbue**-værktøjet i **Punkter og Linjer**-menuen. Du får da også brug for midtpunktet på buen midt mellem *A* og *B*. Det kan findes ved hjælp af vinkelhalveringslinjen for vinklen *ACB*. Den konstrueres ved **Vinkelhalveringslinje**-værktøjet fra **Konstruktion**-menuen efterfulgt af skæringspunktet, der fx nemt kan findes med **Punkt**-værktøjet. Efterfølgende skjules vinkelhalveringslinjen og skæringspunktet.

E. Mål nu både størrelsen af periferivinklen *C* og størrelsen af centervinklen *O*. Træk også i punktet *C*. Hvad observerer du? Overvej og begrund dit resultat.

Vink: Træk en diameter fra *C* gennem centrum *O* ved hjælp af værktøjerne **Halvlinje** og **Skæringspunkt(er)**. Udtryk alle de andre vinkler på figuren ved hjælp af de to vinkler ved *C*.

ANDEN DEL – KONSTRUKTIONSGEOMETRI MED TI-NSPIRE CAS

Trekantskonstruktioner

For at konstruere trekanter med bestemte mål må du først lære at konstruere linjestykker med en bestemt længde, og vinkler med et bestemt gradmål. I praksis bruger man redskaber som en lineal, en passer og en vinkelmåler til at udføre sådanne konstruktioner. Men disse mekaniske instrumenter skal nu erstattes af elektroniske værktøjer. Det sker nemmest ved hjælp af passende værktøjer som **Overfør måling** og **Drejning**.

Husk at du skal sikre at vinkler måles i grader i **Geometri**-værkstedet. Som standard er de heldigvis sat til at stå i grader.

Konstruktion af målfaste linjestykker

Eksempel 1.1 Konstruktion af linjestykker med en bestemt længde

Hvis du fx vil konstruere et vandret linjestykke på 4 cm laver du først en halvlinje et passende sted med værktøjet **Halvlinje** (hold **SHIFT** nede for at tegne den vandret). Derefter vælger du værktøjet **Overfør måling** i **Konstruktion**-menuen, klikker på halvlinjen og taster derefter tallet **4** direkte fra tastaturet.

Derved fremkommer slutpunktet 4 cm langs halvlinjen fra begyndelsespunktet. Højreklik nu på halvlinjen, vælg **Skjul** og konstruer linjestykket mellem de to punkter.

Bemærkning: Du kan kun overføre målinger til **orienterede retlinjede objekter**, såsom halvlinjer, vektorer (og koordinatakser), og **lukkede figurer**, såsom trekanter, polygoner og cirkler. Overfører man målinger til vektorer kan de godt række ud over vektorens længde. Overfører man målinger til en lukket figur skal man til sidst også anføre et startpunkt for den lukkede figur. Hvis man ændrer tallet til et negativt tal skifter man gennemløbsretning for figuren.

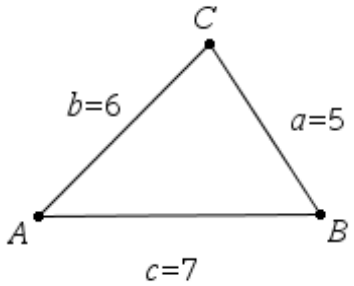
Bemærkning: Du kan ændre enheden af linjestykket i øverste højre hjørne til fx mm eller km. Du kan også opfinde din helt egen enhed, fx fantasia.
Hvad sker der? Prøv herefter at ændre længden af linjestykket til en anden værdi som fx 2 cm. Hvad sker der så?

I stedet for at overføre målinger kan man selvfølgelig også anvende en cirkel med en radius givet ved den måling, der skal overføres. Man klikker da bare på startpunktet for overførslen, dvs. centrum for cirklen, og derefter tastes tallet direkte ind fra tastaturet. Det virker fint med fx linjestykker, hvor slutpunktet findes som et passende skæringspunkt med cirklen.

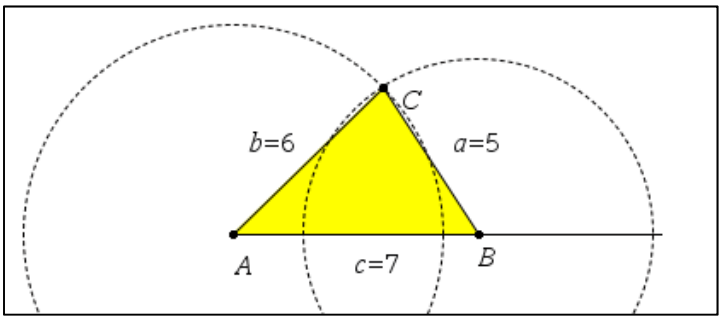
Eksempel 1.2 Første trekantstilfælde

Konstruktion af en trekant ud fra trekantens sider.

Du skal fx konstruere en trekant med sidelængderne a = 5 cm, b = 6 cm og c = 7 cm.



Først afsætter du grundlinjen $c = AB$ med længden 7 cm. Det sker fx ved at tegne en vandret halvlinje med værktøjet **Halvlinje** ud fra punktet A og derefter overføre oplysningen c = 7 til halvlinjen med **Overfør måling**, idet tallet 7 tastes direkte fra tastaturet. Dermed har du konstrueret punkt B. Du kan nu skjule halvlinjen og tegne linjestykket, der forbinder de to punkter A og B, hvorved grundlinjen er på plads. Endelig finder du det sidste punkt C som skæring mellem to cirkler:



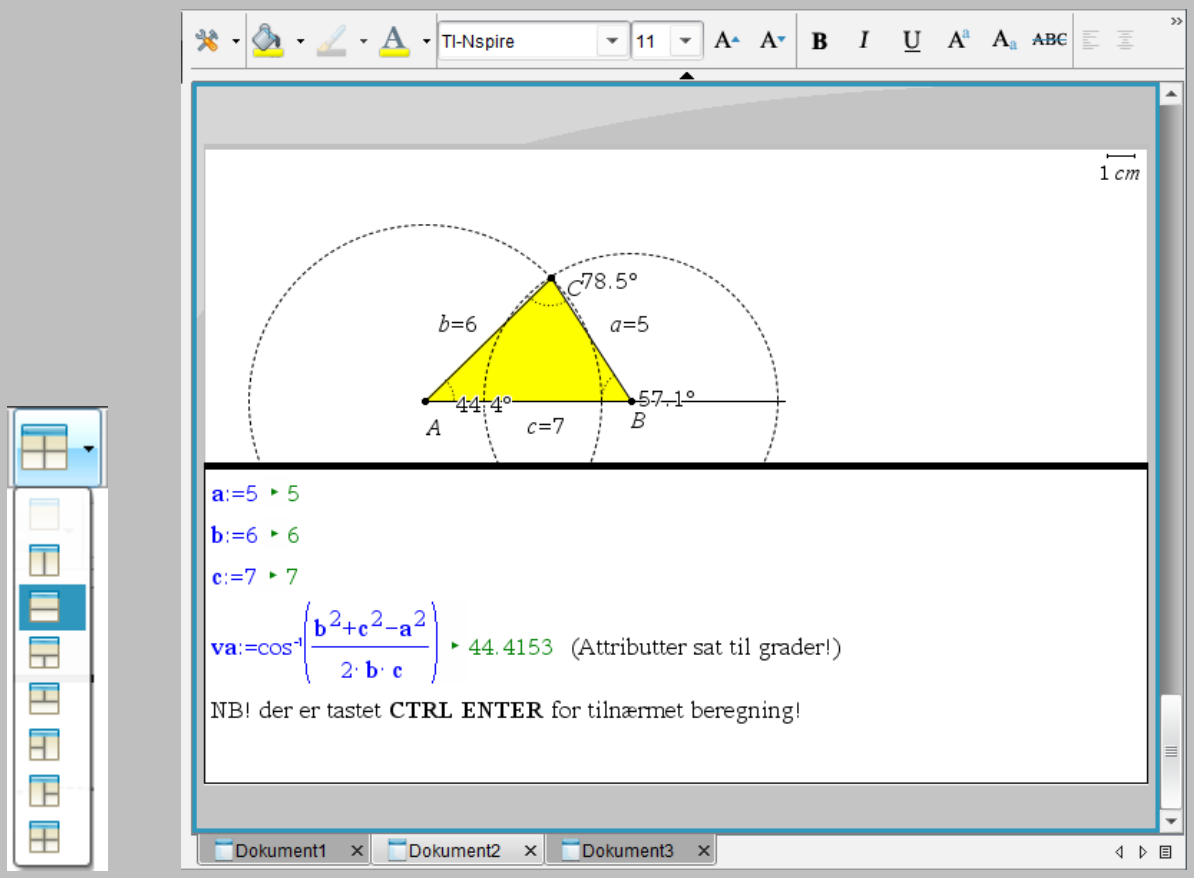
Den første cirkel har centrum i A og radius 6 cm, mens den anden cirkel har centrum i B og radius 5 cm. For at konstruere den første cirkel vælger du **Cirkel**-værktøjet og klikker på centrum A, efterfulgt af en indtastning af tallet for radius, dvs. 6, for at gøre konstruktionen af cirklen færdig. Den anden cirkel konstrueres på tilsvarende måde, men som nævnt med centrum B og radius 5. Dér hvor de to cirkler skærer hinanden ligger det sidste trekantspunkt C. Vælg fx **Skæringspunkt(er)**-værktøjet og klik på de to cirkler for at konstruere punktet C (eller vælg **Punkt**-værktøjet og peg direkte på skæringspunktet). Forbind til slut punkterne A, B og C med en **trekant**.

Bemærkning: Ved at højre-klikke på cirklerne kan du ændre deres udseende via **Attributter** eller helt skjule dem med **Vis/Skjul**.

Udmål nu vinklerne A, B og C ved hjælp af **Vinkel**-værktøjet.

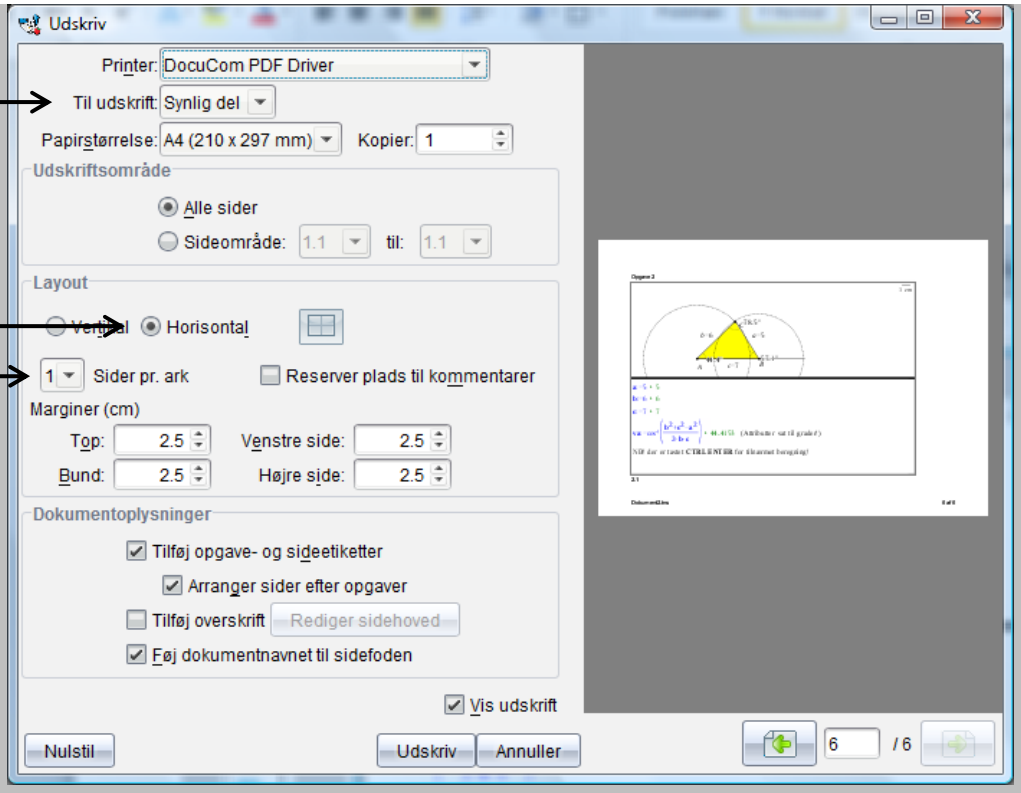
Kontrollér eventuelt ved hjælp af beregning størrelsen af vinkel *A* (men det forudsætter kendskab til trigonometri). Skriv i givet fald også hvordan du beregnede vinkel *A*. Det gør du lettest ved at splitte arbejdsfladen i to fx via menuen **Rediger ► Sidelayout ► Vælg Layout**: . Du kan også som vist splitte skærmen ved hjælp af layoutikonet på Windows-bjælken.

Vælg herefter et **Note**-værksted, hvor du kan skrive hvordan du fandt frem til vinkel *A*:

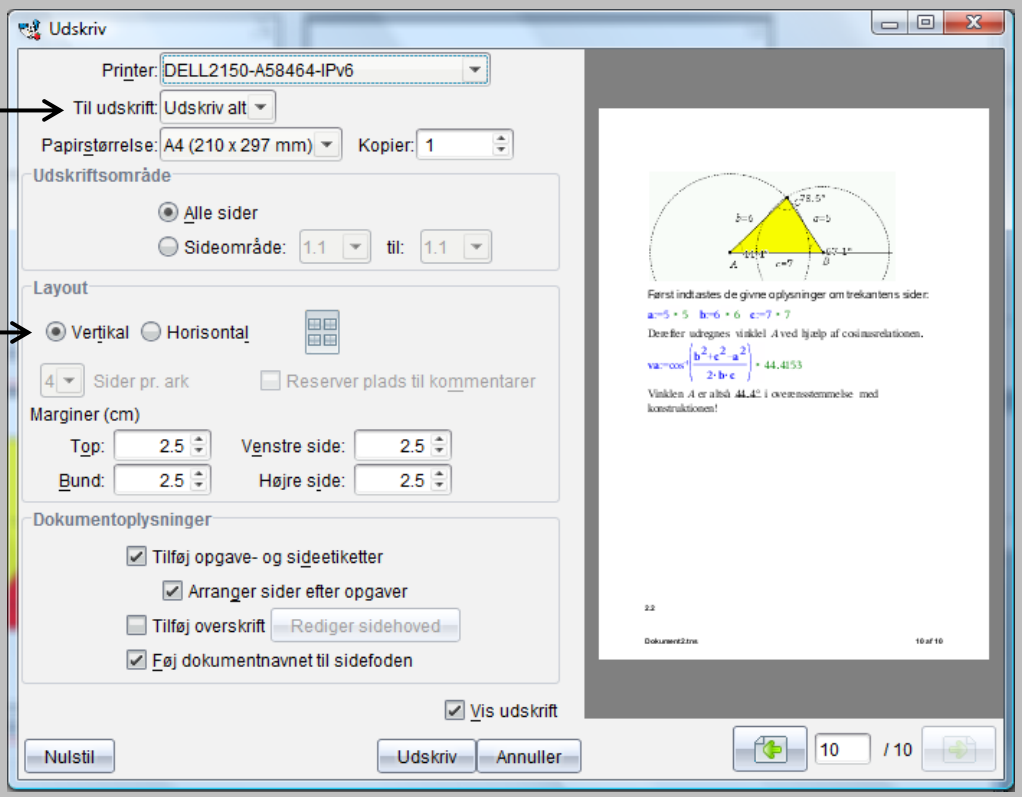


Når du som vist gennemfører beregningen af vinklen i et matematikfelt (**CTRL-M**) er det vigtigt at være opmærksom på, at du kan skifte attributter for et eller flere matematikfelter ved at markere dem, højreklikke og vælge attributter. Som udgangspunkt regner **Note**-værkstedet i radianer, men det skal jo ændres til grader! Det er også vigtigt at kalde vinklen for noget andet end siden, derfor betegnelsen **va** for vinkel a ☺

Udskriv afslutningsvis konstruktionen sammen med beskrivelsen. I **Udskriv**-dialogboksen skal du da enten sende **alt** til udskrift eller kun den **synlige del**. I det første tilfælde udskrives geometrisiden og notesiden på separate ark (men alt kommer med også selv om noten er meget lang). I det sidste tilfælde skal du huske at sætte antallet af sider pr. ark til 1 og det er også en klar fordel at vælge **Horisontal** billedopsætning!



Du kan også vælge at samle hele udskriften på **Note**-siden. I så fald skal du skille siderne ad (**Rediger ► Sidelayout ► Spred applikationer CTRL 6**) overføre en skærmkopi af konstruktionen til **Note**-værkstedet, sådan som vi tidligere har forklaret det:



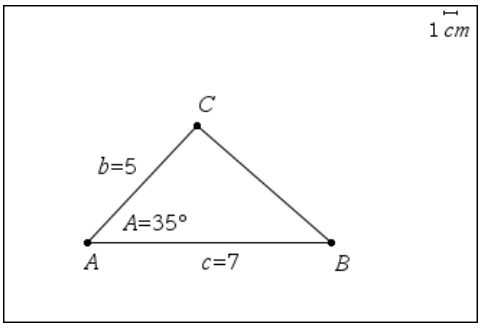
Konstruktion af målfaste vinkler

Man kan udnytte værktøjet **Drejning** fra **Transformation**-menuen til at konstruere en forelagt vinkel.

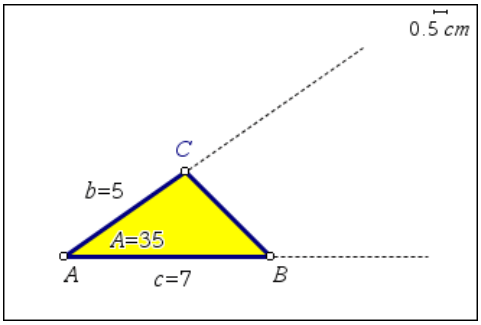
Eksempel 1.3 Andet trekantstilfælde

Konstruktion af en trekant ud fra en vinkel og de hosliggende sider

Du skal fx konstruere en trekant med målene A = 35°, b = 5 og c = 7.



Som i eksempel 1.2 begynder du med at konstruere en vandret halvlinje fra punkt A og derefter overfører du målingen c = 7 til halvlinjen for at få frembragt punktet B. Herefter vælger du **Drejning**-værktøjet. Klik først på punktet A som omdrejningspunktet, derefter på halvlinjen, der går gennem A og B efterfulgt af en indtastning af drejningsvinklen 35. Derved drejes halvlinjen 35° om A i positiv omløbsretning (mod uret). Dette giver halvlinjen som punktet C ligger på. Overfør nu oplysningen b = 5 til den nye halvlinje for at få frembragt punktet C. Endelig kan du skjule halvlinjerne og tegne trekanten, der forbinder de tre punkter.



Udmål størrelsen af vinkel B samt længden af siden a.

Kontrollér eventuelt ved hjælp af en beregning længden af siden a samt størrelsen af vinkel B (men det forudsætter kendskab til trigonometri). Skriv i givet fald også hvordan du beregnede længden af siden a samt størrelsen af vinkel B i et **Note**-værksted.

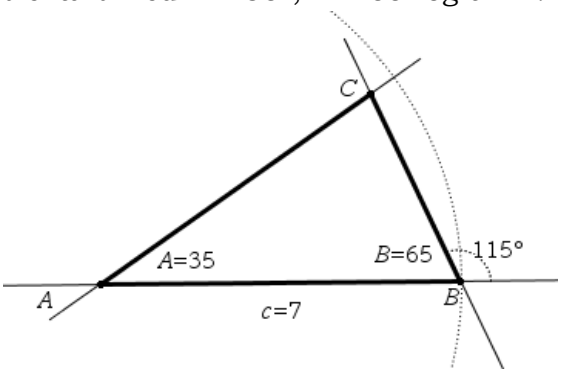
Udskriv konstruktionen sammen med beskrivelsen.

Eksempel 1.4 Fjerde og femte trekantstilfælde

Konstruktion af en trekant ud fra en side og to af vinklerne

Bemærkning: Når du får oplyst to af vinklerne kan du nemt beregne den tredje eftersom vinkelsummen er 180°. Du kan derfor altid gå ud fra, at det er de to hosliggende vinkler, der kendes.

Du skal fx konstruere en trekant med A = 35°, B = 65° og c = 7.



Først konstruerer du fx en vandret linje med udgangspunkt i punkt A ved hjælp af **Linje**-værktøjet. Vælg herefter **Cirkel**-værktøjet og indtast tallet 7 som radius efterfulgt af punkt A som centrum. Dermed er punkt B fastlagt som skæringspunktet mellem cirklen og linjen frembragt med udgangspunkt i punkt A. Vælg værktøjet **Skæringspunkt(er)** og klik på cirklen og linjen. Dette giver dig punkt B (konstruktionen giver to skæringspunkter – vælg det ene af dem).

Vælg herefter **Drejning**-værktøjet. Klik på punkt A som omdrejningspunkt efterfulgt af en indtastning af drejningsvinklen A = 35° samt linjen gennem A og B for at dreje linjen 35° om A i positiv omløbsretning.

Dernæst drejes linjen med udgangspunkt i B som omdrejningspunkt. Linjen drejes denne gang med vinklen 180° – 65° = 115° omkring B. Hvor de to linjer skærer hinanden finder du det tredje punkt C. Dette konstrueres.

Bemærkning: Husk at en positiv drejningsvinkel svarer til en drejning i positiv omløbsretning, dvs. til en drejning *mod* uret. Negativ omløbsretning svarer dermed til drejning *med* uret. Den sidste drejning af linjen omkring B kan derfor også gennemføres ved at skrive et minus foran tallet i B = 65°. Prøv at overbevise dig om dette ved at rotere linjen gennem A og B med drejningsvinklen B = – 65° og med punkt B som omdrejningspunkt.

Find ved måling længden af de to sidste sider.

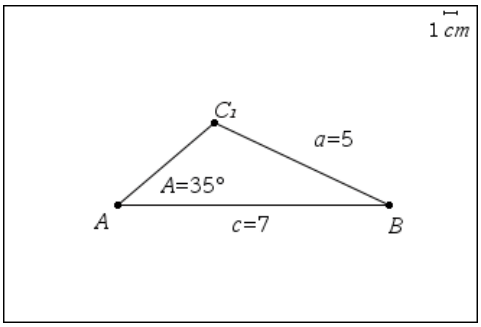
Kontrollér eventuelt ved hjælp af beregning længderne af siderne a og b (men det forudsætter kendskab til trigonometri).

Skriv i givet fald også hvordan du beregnede længderne og udskriv konstruktionen sammen med beskrivelsen.

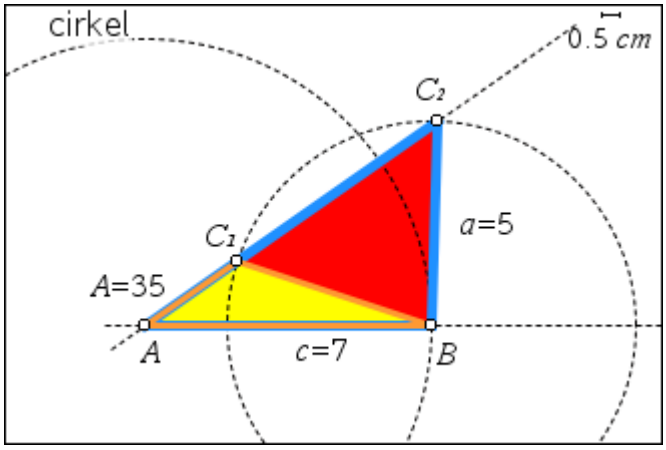
Eksempel 1.5 Tredje trekantstilfælde

Konstruktion af en trekant ud fra en vinkel og vinklens ene hosliggende samt vinklens modstående side.

Dette er det mest komplicerede af trekantstilfældene, hvorfor det er gemt til sidst. Du skal fx konstruere en trekant, hvor A = 35°, a = 5 og c = 7.



Du begynder som sædvanlig med at konstruere siden AB – fx ved at tegne en linje med udgangspunkt i punkt A og derefter konstruere en cirkel med centrum i A og radius c = 7. Punkt B fås dermed som skæringen mellem cirklen og linjen (den ene af de to skæringer!). Dernæst drejes linjen omkring punktet A som omdrejningspunkt med drejningsvinklen A = 35°. Så skal du blot have konstrueret siden a. Det sker ved at tegne en cirkel med centrum i B og radius 5 cm. Der hvor cirklen skærer siden b fås to mulige positioner for C (sinusfælden i trigonometri).



Udmål på figuren længderne af siderne b_1 og b_2, såvel som størrelserne af vinklerne C_1 og C_2. Hvilken sammenhæng er der mellem vinklerne C_1 og C_2?

Kontrollér eventuelt ved hjælp af en beregning længderne af siderne b_1 og b_2 og størrelserne af vinklerne C_1 og C_2 (men det forudsætter kendskab til trigonometri).

Skriv i givet fald også hvordan du beregnede længder og vinkler. Udskriv konstruktionen sammen med beskrivelsen.

Udfordring: Undersøg ved brug af **TI-Nspire CAS** om der altid er to løsninger til det tredje trekantstilfælde.

TREDJE DEL – PROBLEMLØSNING MED GEOMETRI I TI-NSPIRE CAS

Problem 1.1 En matematisk orienteringstur

Du skal tilrettelægge en orienteringstur, der skal være mellem 3 og 4 km lang. For at danne dig et indtryk af ruten skal du først fremstille en korttegning i **TI-Nspire CAS**. Målet med turen er bl.a. at løberne skal blive fortrolige med kursbegrebet. Kursen måles altid i forhold til retningen mod Nord (i negativ omløbsretning, altså med uret!). Det betyder fx at hvis man skal starte med kurs 30°, skal retningen man løber efter danne en vinkel på 30° med Nord (dvs. mod højre).

Du skal altså konstruere løbeturen efter følgende retningslinjer: Retningen til **Nord** er lodret på dit kort. Vælg selv et passende målestoksforhold.

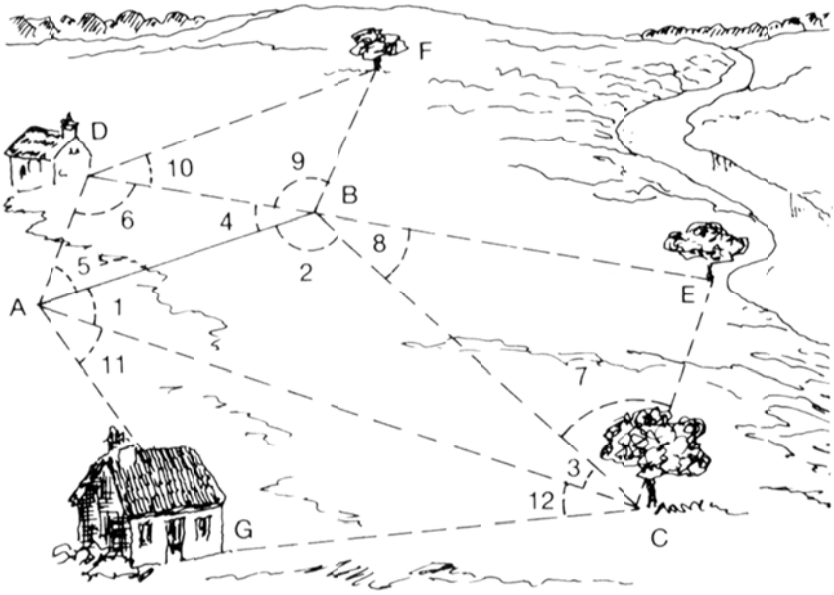
Hvilken kurs skal du vælge for at nå hjem til post **A**?

Hvor lang bliver hele løbeturen?

Hvilken kurs skal du vælge, hvis du i stedet for at vælge at løbe direkte hjem fra post **C**?

Hvor lang bliver løbeturen i dette tilfælde?

Problem 1.2: Landmåling



Figuren viser et landsted, der er opmålt ved triangulering med udgangspunkt i en basislinje **AB** der har længden 63.7 meter. Dernæst er vinklerne til en række genstande ude i terrænet opmålt med en teodolit. Det gav anledning til de følgende gradtal:

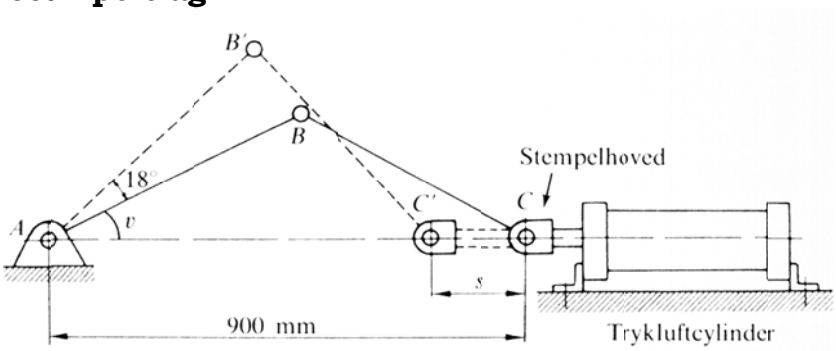
1	2	4	5	7	8	9	10	11	12
29.5	72.3	26.7	38.4	98.5	51.9	97.7	63.1	25.4	17.6

Bestem de manglende vinkler i trekanterne knyttet til trianguleringen.

Konstruér på basis af de oplyste mål et kort over landstedet i målestoksforholdet 1:1000.

Bestem afstanden fra hushjørnet **G** til træerne **C**, **E** og **F**. ◊

Problem 1.3 Stempelslag



På en trykluftcylinder er der monteret en vippearm *ABC*. Når trykluftcylinderen anvendes, presses stempelhovedet væk fra cylinderen og vippearmen skifter stilling til *AB'C'*. Herved drejer leddet *AB* sig som vist på figuren 18°. Afstanden fra *A* til *C* (hvor stemplet er inde) er som vist på figuren 900 mm.

Længden af de to led i vippearmen er givet ved

$$AB = 520 \text{ mm} \qquad BC = 490 \text{ mm}$$

Konstruér en skitse af opstillingen i målestoksforholdet 1:10.

Bestem højden af *B'* over den vandrette akse *AC*.

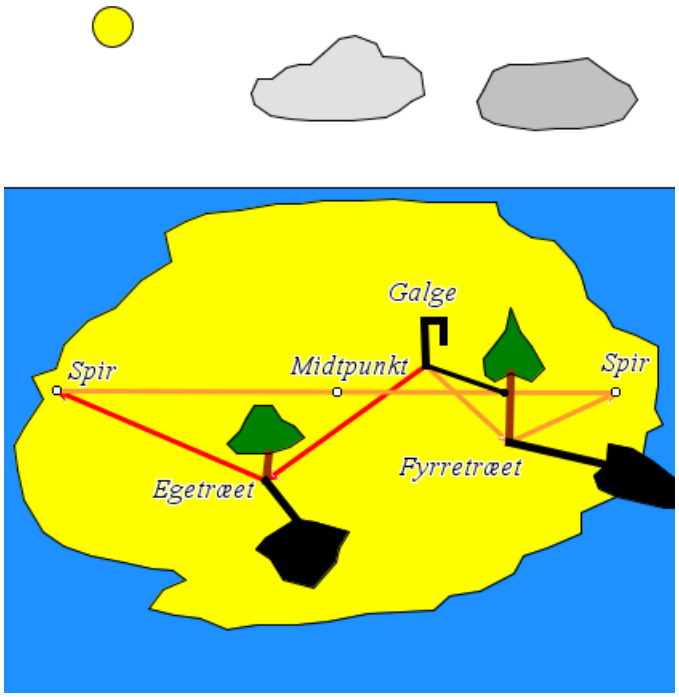
Afstanden mellem *C* og *C'* kaldes slaglængden.

Bestem stemplets slaglængde.

Udfordring: Konstruér en animation, der viser stemplet i fuld bevægelse mellem de to yderstillinger *ABC* og *AB'C'*.

Vink: Du kan fx starte med at konstruere linjestykket *CC'* svarende til slaglængden og et dertil hørende frit punkt på *CC'*, der kan bevæge sig frem og tilbage i animationen.

Problem 1.4: Skattejagt[1]



"Der var en eventyrlysten ung mand, der blandt sin oldefars papirer fandt et stykke pergament, som røbede stedet, hvor der lå skjult en skat. Instruktionerne lød som følger:

Sejl til … nordlig bredde og … vestl. længde, hvor du vil finde en øde ø. Der ligger en stor åben eng på nordkysten af øen, og her står to enlige træer. Der vil du også se en gammel galge, i hvilken vi plejede at hænge forrædere. Du skal gå ud fra galgen og hen til egen og tælle dine egne skridt. Ved egen skal du dreje til højre i en ret vinkel og tage det samme antal skridt. Anbring her et skibsspiger i Jorden. Nu skal du vende tilbage til galgen og gå hen til fyrretræet, idet du samtidigt tæller dine skridt. Ved fyrretræet skal du dreje til venstre i en ret vinkel og sørge for at du tager det samme antal skridt, og anbringer et nyt skibsspiger i jorden. Grav midtvejs mellem skibsspigerne, for der ligger skatten.

Instruktionen var ret klar og tydelig, så vor unge mand chartrede et skib og sejlede til sydhavet. Han fandt øen, marken, egetræet og fyrretræet, men til hans store sorg var galgen forsvundet. Der var gået alt for lang tid siden dokumentet blev skrevet; regn og sol og blæst havde fået træet til at smuldre bort, og der var ikke efterladt noget spor af, hvor det engang havde stået."

Du skal nu prøve at finde skatten: Afsæt to punkter E og F svarende til placeringen af egetræet og fyrretræet. Afsæt et tredje tilfældigt punkt G svarende til galgens mulige placering. Konstruer placeringen af de to skibsspigre og deres midtpunkt: skattens mulige placering.

Undersøg, hvad der sker, når man ændrer galgens placering. Kan du nu sige noget nærmere om, hvor skatten ligger begravet? Hvordan kan du ud fra de to træers placering på simpel vis finde placeringen af skatte uden at inddrage galgen?

[1] Efter G. Gamov: Videnskaben er sjov. Skandinavisk bogforlag.

Problem 1.5: Vivianis problem

Konstruér en ligesidet trekant *ABC* og et vilkårligt punkt *P* inde i trekanten.

Bestem summen af de tre (vinkelrette) afstande fra *P* til hver af siderne i trekanten. Hvad ser du?

Nedfæld de vinkelrette fra *P* til de tre trekantssider *a*, *b* og *c*. Skæringspunkterne med siderne, dvs. fodpunkterne for *P*, kaldes P_a, P_b og P_c. Forbind *P* med fodpunkterne P_a, P_b og P_c. Længden af forbindelseslinjerne angiver nu de tre afstande. De fungerer samtidigt som højder for de tre deltrekanter, der fremkommer når du forbinder punktet *P* med trekantens tre hjørner *A*, *B* og *C*.

Hvad gælder der, hvis *P* ligger i en af trekantens vinkelspidser?

Hvad gælder der, hvis *P* ligger på en af trekantens sider?

Hvad gælder, hvis punktet *P* ligger udenfor trekanten?

Hvilken betydning har det for resultatet, at trekanten er ligesidet?

Lav den samme undersøgelse, hvor den ligesidede trekant erstattes med et kvadrat, henholdsvis en regulær femkant.

Problem 1.6: Varignons problem

A. Konstruér en vilkårlig trekant *ABC* og et vilkårligt punkt *P* uden for trekanten.

   Spejl punktet *P* i hjørnet *A*. Spejlbilledet kaldes *Q*. Spejl derefter punktet *Q* i hjørnet *B*. Spejlbilledet kaldes *R*. Spejl endelig punktet *R* i det sidste hjørne *C*. Spejlbilledet kaldes *S*.

   Træk i punktet *P*. Kan du få punkterne *P* og *S* til at falde sammen? Hvordan ligger trekanten *PQR* så i forhold til trekanten *ABC*?

B. Konstruér derefter en vilkårlig firkant *ABCD* og et vilkårligt punkt *P* uden for firkanten.

   Spejl punktet *P* i hjørnet *A*. Spejlbilledet kaldes *Q*. Spejl derefter punktet *Q* i hjørnet *B*. Spejlbilledet kaldes *R*. Spejl derefter punktet *R* i hjørnet *C*. Spejlbilledet kaldes *S*. Spejl endelig punktet *S* i det sidste hjørne *D*. Spejlbilledet kaldes *T*.

   Træk i punktet *P*. Kan du få punkterne *P* og *T* til at falde sammen?

   Hvad skal der gælde om firkanten *ABCD* for at punkterne *P* og *T* falder sammen?