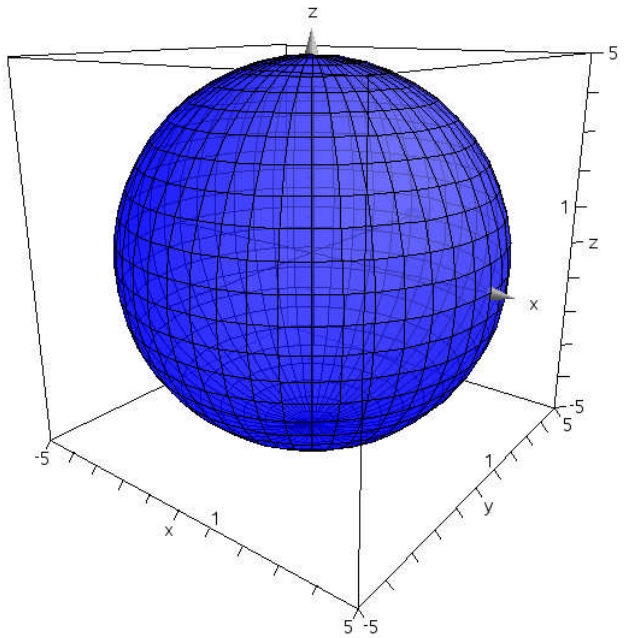
Rumgeometri med TI-Nspire CAS 3.2: Kuglen, keglen og cylinderen



Indhold

1. Kuglen 1
   1.1 Parameterfremstillinger: Betydningen af parametrene *t* og *u* 1
   1.2 Kuglens attributer: Gitterinddelinger, transparens og spotlight 4
   1.3 Farvelægning af kuglen 6
   1.4 Udsnit af kuglen 9
2. Cylinderen 10
   2.1 Den indskrevne kugle: Cylinderprojektionen 11
   2.2 Cylinderprojektionen er arealbevarende: Overfladen af en kugle 14
   2.3 Udfoldningen af en cylinder: Den krumme overflade af en cylinder 15
3. Keglen 16
   3.1 Cavalieri/Arkimedes bevis for kuglens rumfang 17
   3.2 Udfoldningen af en kegle: Keglens krumme overflade 19
   3.3 Sammenhæng mellem rumfang og overflade for cylinder, kugle og kegle 20
4. Keglesnitsflader 23
   4.1 Omdrejningsflader mm 24
   4.2 Omdrejningshyperboloiden med 2 net 25
5. Sfærisk geometri 27
   5.1 Konstruktion af den sfæriske trekant: 28

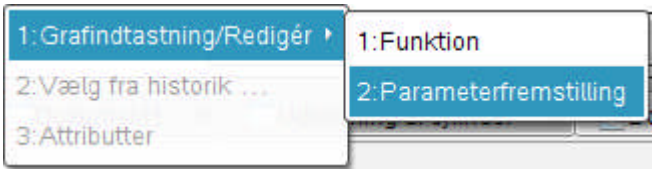
Bjørn Felsager, April 2012

1. Kuglen

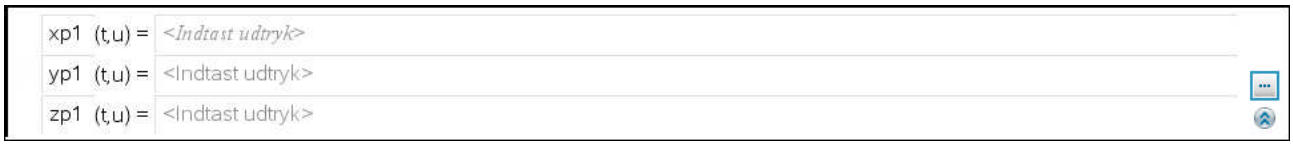
1.1 Parameterfremstillinger: Betydningen af parametrene *t* og *u*

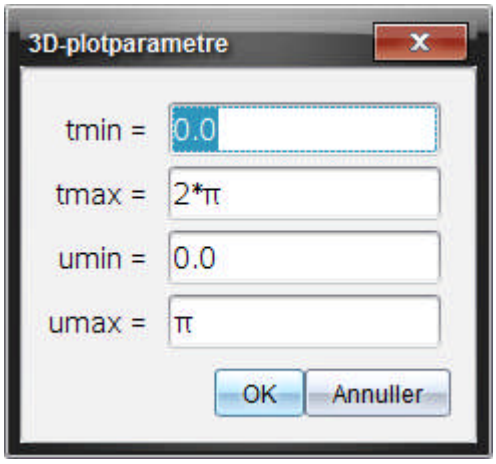
Med den nye version af TI-Nspire CAS er rumgeometrimodulet kraftigt udvidet, først og fremmest med parameterfremstillinger. Det åbner muligheden for realistiske visualiseringer af simple rumgeometriske objekter som fx kugler, kegler og cylindre.

Vi begynder med at se på parameterfremstillingerne. Ved at højre klikke i grafindtastningsfeltet åbnes mulighed for at arbejde med parameterfremstillinger:



De to parametre hedder *t* og *u* og deres definitionsintervaller kan findes ved at klikke på ikonet :

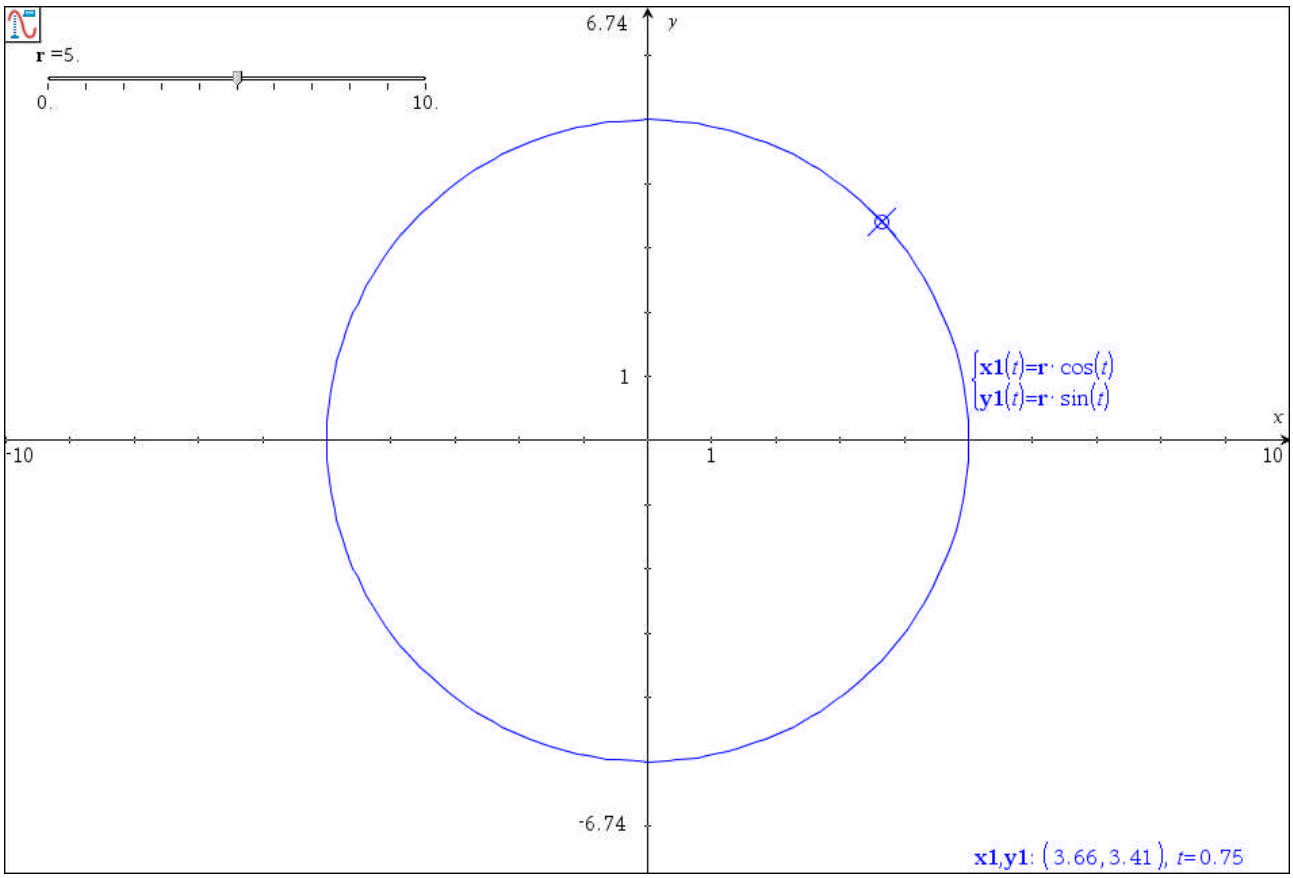




Selv om man selvfølgelig kan ændre på disse intervaller vil vi beholde dem i det følgende og udnytte deres særlige egenskaber. Spørgsmålet er så hvordan man bedst kan tolke disse parametre. Den første parameter *t*, der løber fra 0 til 2π, er den samme som parameteren *t* i de 2-dimensionale parameterfremstillinger:

Parameteren *t* kan derfor tolkes som den *polære vinkel t*, dvs. *vinklen rundt omkring z-aksen*. I 2 dimensioner har cirklen med radius *r* parameterfremstillingen

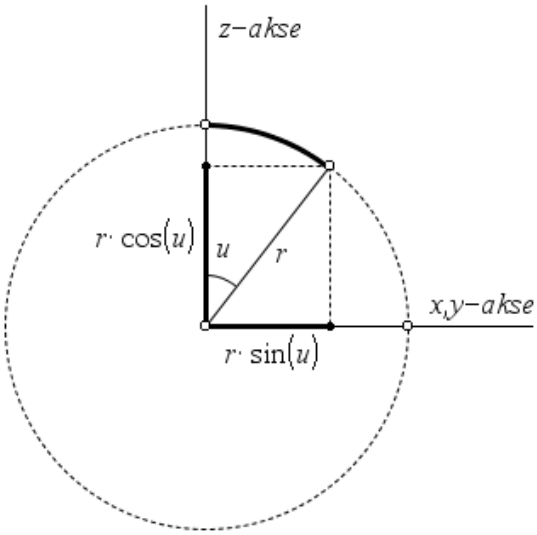
$$\begin{cases} x1(t) = r \cdot \cos(t) \\ y1(t) = r \cdot \sin(t) \end{cases}$$



I 3 dimensioner kan vi tilsvarende tage udgangspunkt i parameterfremstillingen

$$\begin{cases} xp1(t) = f(u)\cdot\cos(t) \\ yp1(t) = f(u)\cdot\sin(t) \\ zp1(t) = g(u) \end{cases},$$

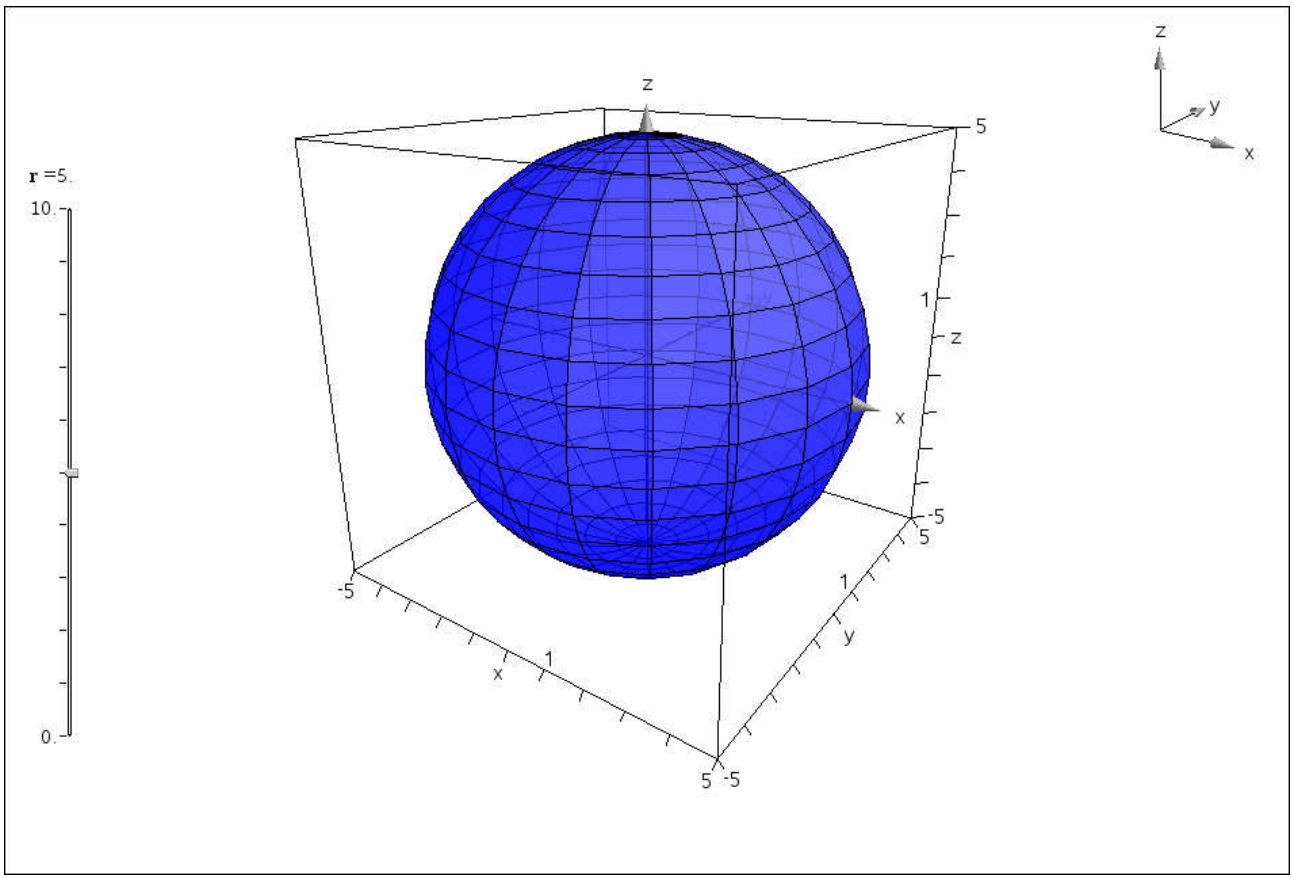
hvor parameteren t altså kan tolkes som *længdegraden*, dvs. vinklen rundt langs ækvatorcirklen i x-y-planen, og hvor $f(u)$ angiver den polære radius, dvs. afstanden til z-aksen og $g(u)$ højden langs z-aksen.



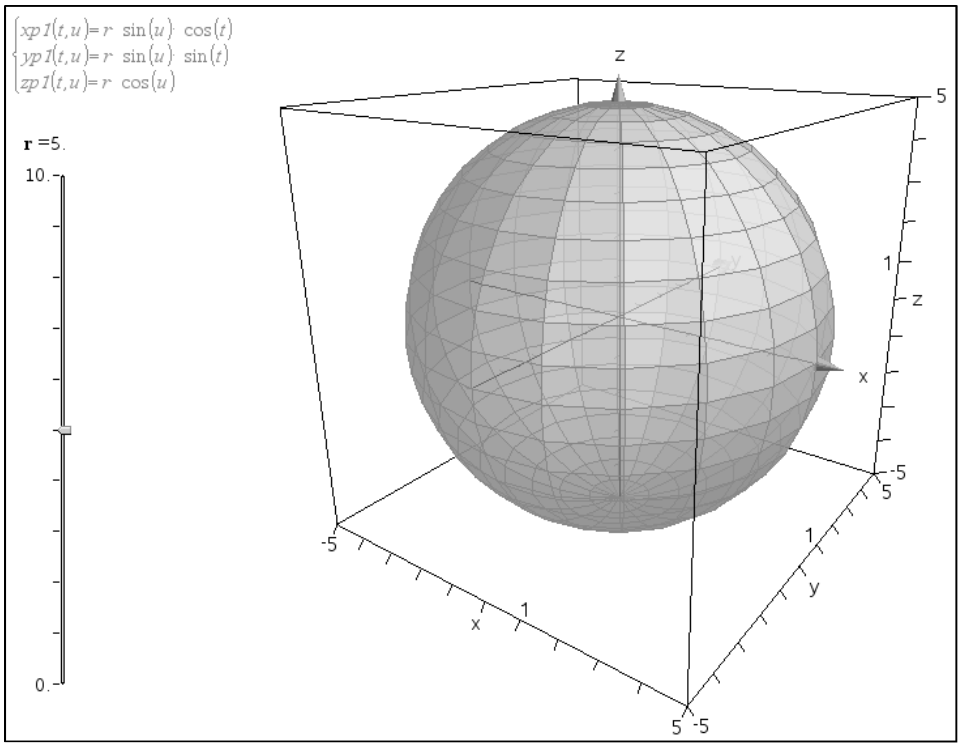
Tolker vi ydermere u som den sfæriske vinkel med z-aksen, dvs. den astronomiske polvinkel, der er nært beslægtet med brfeddegraden, kan vi nemt frembringe en parameterfremstilling for kuglen med radius r, idet afstanden til z-aksen er givet ved $f(u) = r\cdot\sin(u)$ ligesom højden langs z-aksen er givet ved $g(u) = r\cdot\cos(u)$.

Den samlede parameterfremstilling for en kugle med radius r er derfor givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{cases} xp1(t) = r \cdot \sin(u) \cdot \cos(t) \\ yp1(t) = r \cdot \sin(u) \cdot \sin(t) \\ zp1(t) = r \cdot \cos(u) \end{cases}$$

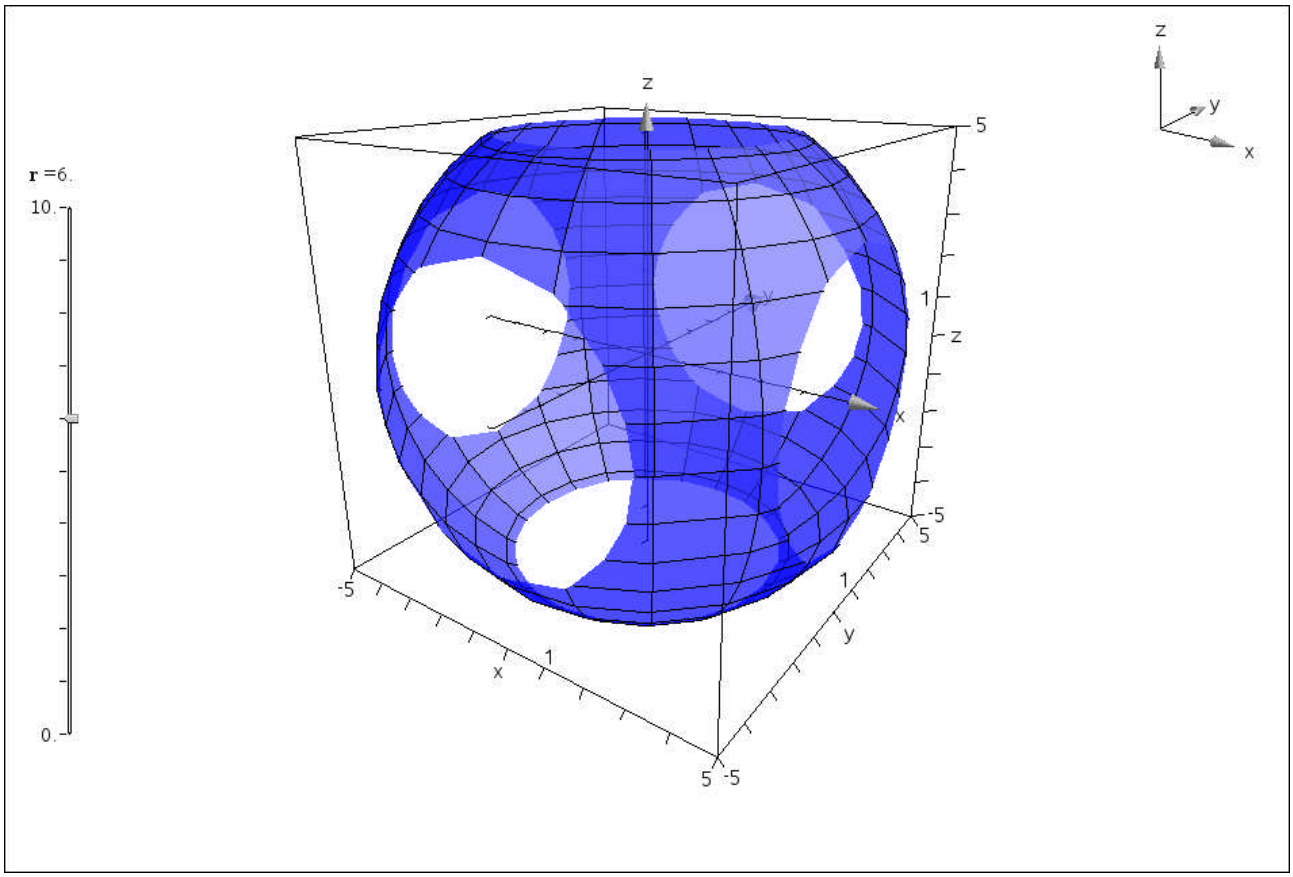


Du kan få parameterfremstillingen at se ved at lade musen pege på kuglen (men mister farven!)



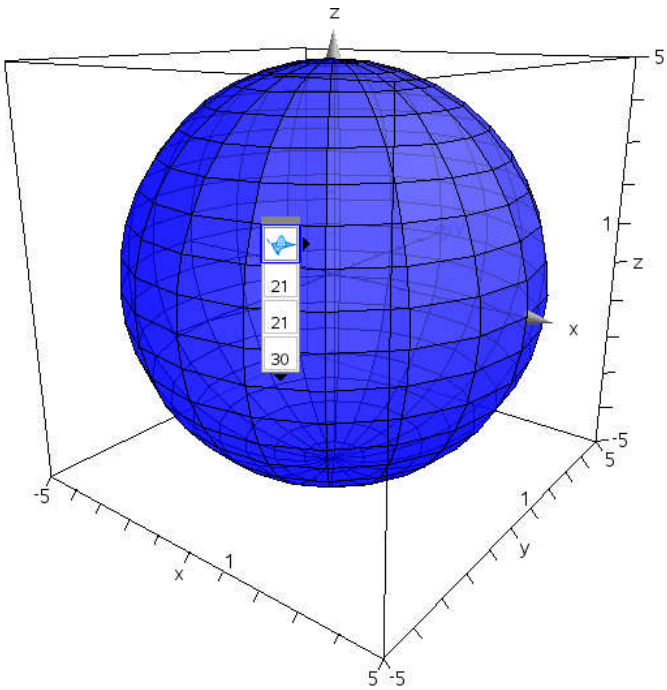
1.2 Kuglens attributer: Gitterinddelinger, transparens og spotlight

Når vi vil visualisere en kugle skal vi passe på at det kun er den del af kuglen, der ligger indenfor scenen, der bliver vist. Hvis radius bliver for stort i forhold til scenens udstrækning afskæres kuglen altså:



Men det kan man selvfølgelig løse ved at sætte koordinatsystemets grænser op.

Tilsvarende kan man regulere gitterinddelingen ved at højreklikke og vælge attributter:

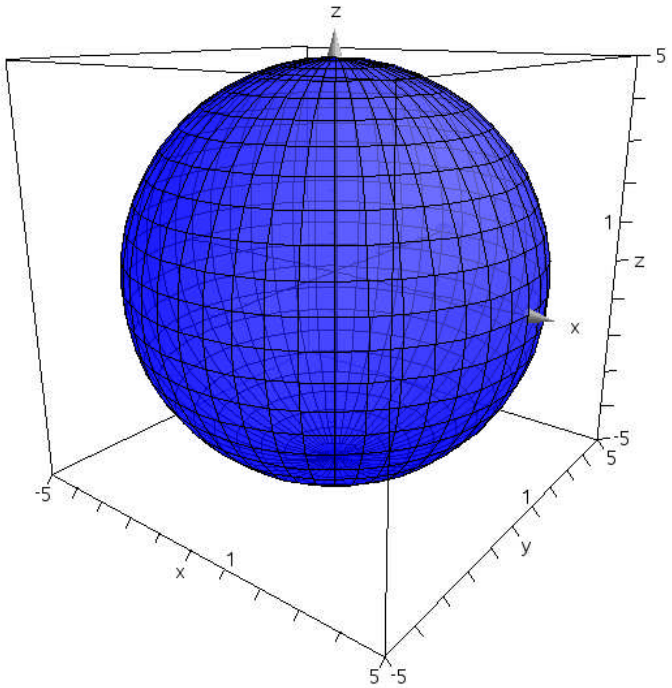


Vi ser da at der er valgt 21 gitterpunkter langs den første parameter *t* og tilsvarende 21 gitterpunkter langs den anden parameter *u*. Derefter følger transparensen/gennemsigtigheden, der er sat til 30%, og trækker man videre i attributterne følger en indstilling for spotlight. Men tilbage til gitterinddelingerne: Med 21 gitterpunkter fås 20 gitterintervaller, og det er ikke det mest hensigtsmæssige valg for en kugle.

Idet vi husker at parameteren *t* svarer til vinklen rundt omkring *z*-aksen, så repræsenterer parameteren *t* netop længdegraden. Det vil derfor være naturligt at opdele *t*-parameteren i 48 intervaller, der hver svarer til ½ time eller 7½°.

Tilsvarende svarer parameteren *u* til vinklen med z-aksen. Den er altså nært beslægtet med breddegraden, der jo svarer til vinklen med ækvatorplanet. Den samme vinkelinddeling som langs ækvator fører da til en opdeling i 24 intervaller, der igen hver for sig svarer til 7½° langs meridianen.

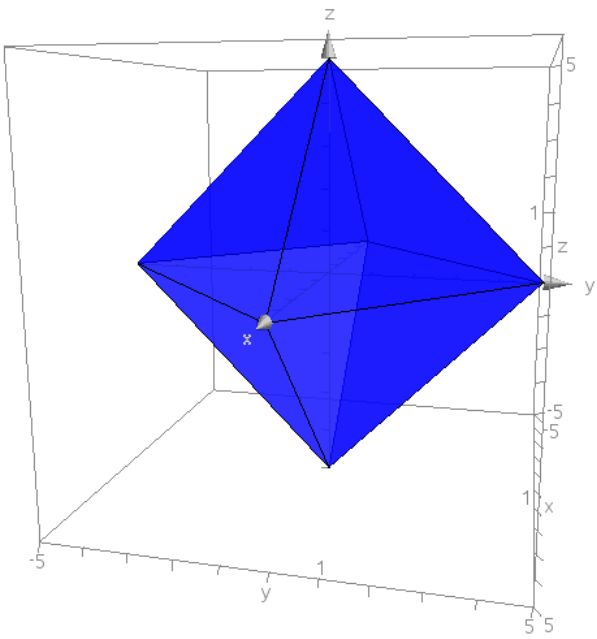
Vi sætter derfor gitterinddelingerne op til 49, henholdsvis 25:

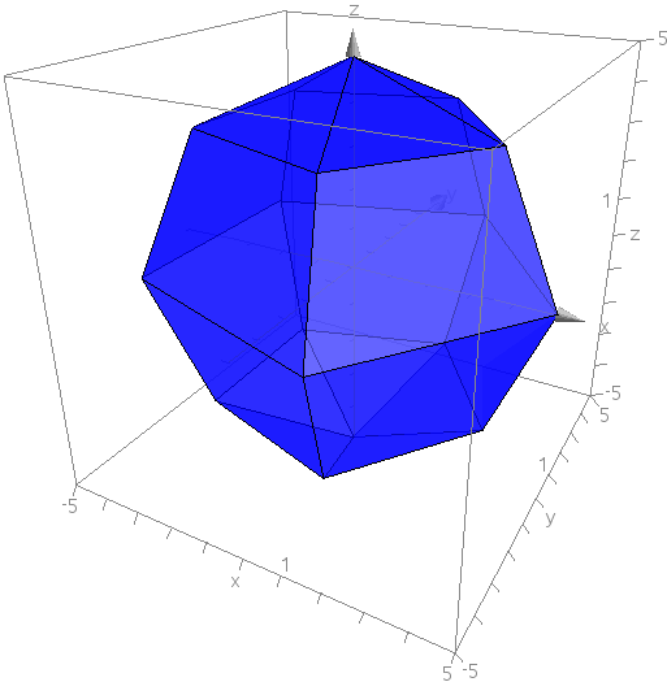


Man kan godt lege med gitterinddelingerne og arbejde med meget grove gitterinddelinger:

Deler vi vandret rundt langs ækvator i 4 lige store intervaller og lodret langs meridianen i 2 lige store intervaller får vi afbildet kuglen som et regulært oktaeder. Det kræver altså 5 gitter punkter for *t* og 3 gitterpunkter for *u*.

Deler vi i stedet vandret rundt langs ækvator i 5 lige store intervaller og lodret langs meridianen i 4 lige store intervaller får vi afbildet kuglen som et ikosaeder. Det kræver altså 6 gitterpunkter for *t* og 5 gitterpunkter for *u*. Men det er desværre ikke regulært. Det er kun det øverste og nederste hjørne, der svarer til hjørnerne i et regulært ikosaeder. Det ser sjovt ud, men det er altså *ikke* ægte polyedre, men bare *afstumpede kugler*.

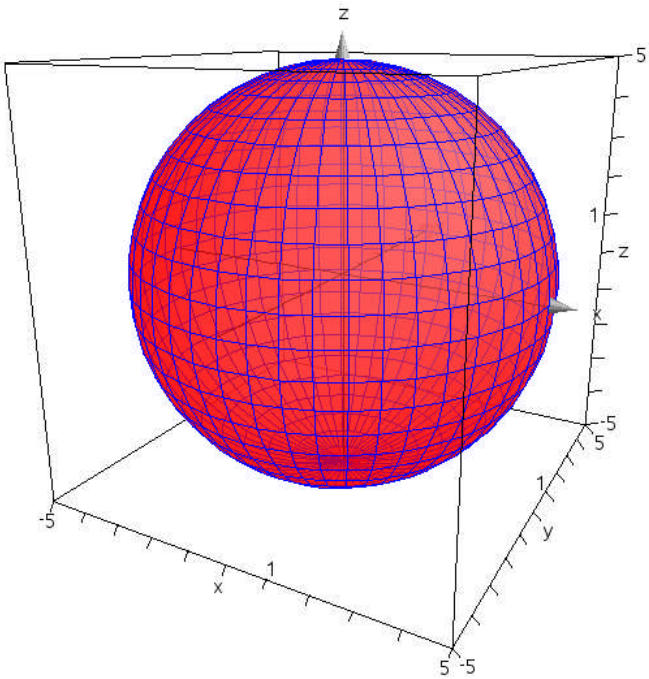




1.3 Farvelægning af kuglen

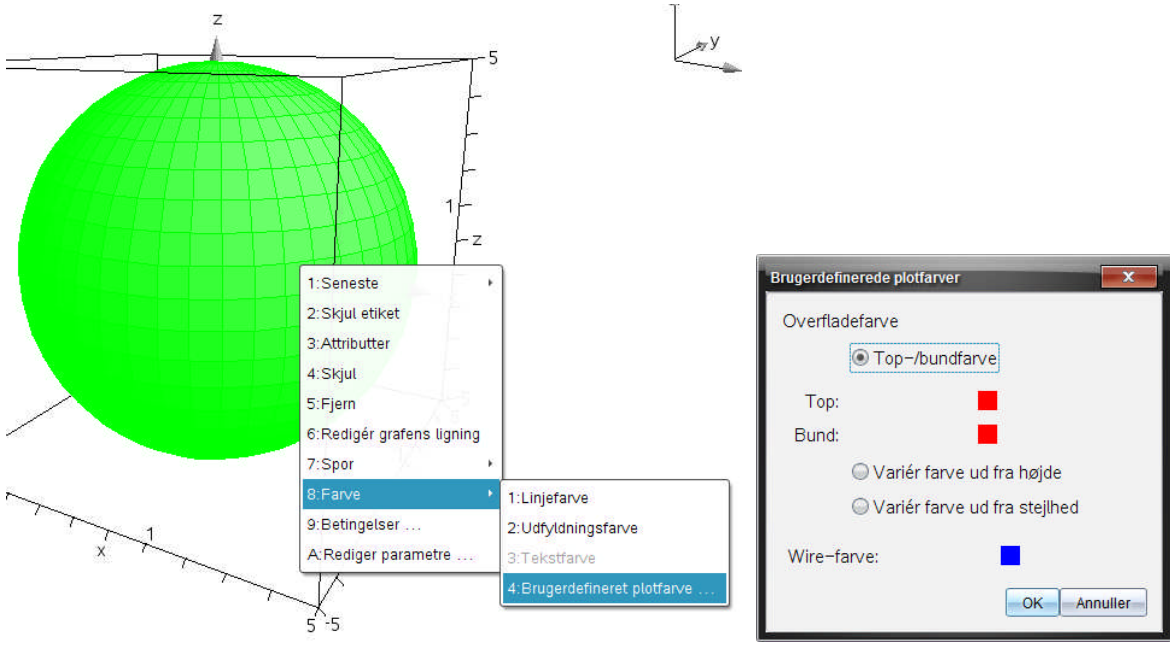
Vi vender tilbage til kuglen. Udover parameterinddelingerne kan vi lege med farvelægningen. Der er grundlæggende to muligheder: Vi kan farvelægge med 15 farver som i 2 dimensional geometri. Vi kan også farvelægge med 3 dimensionale farveskemaer, hvilket giver mulighed for at farve inderside og yderside forskelligt mm. Herunder kan vi anvende betinget farvelægning, så fx topfarven afhænger af fx kuglens radius. Vi viser begge teknikker med kuglen:

Først farver vi 2-dimensionalt og vælger fx rød som udfyldningsfarve og blå som linjefarve:

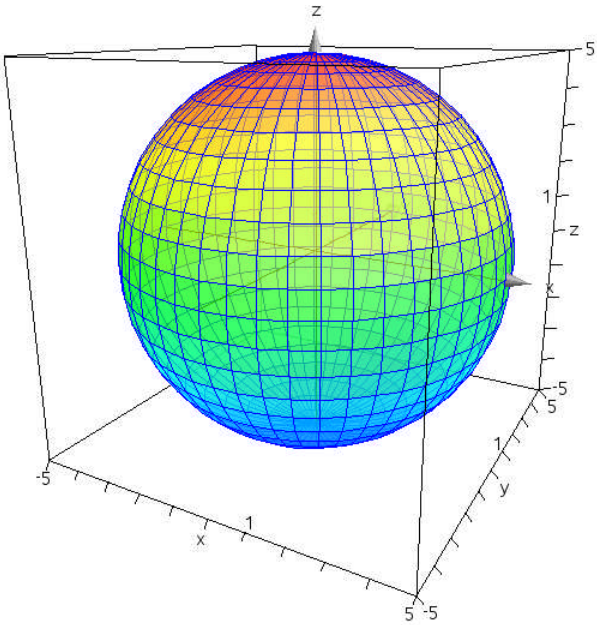


Det er helt ligetil og vi kan bare anvende farvelægningsikonerne på bjælken.

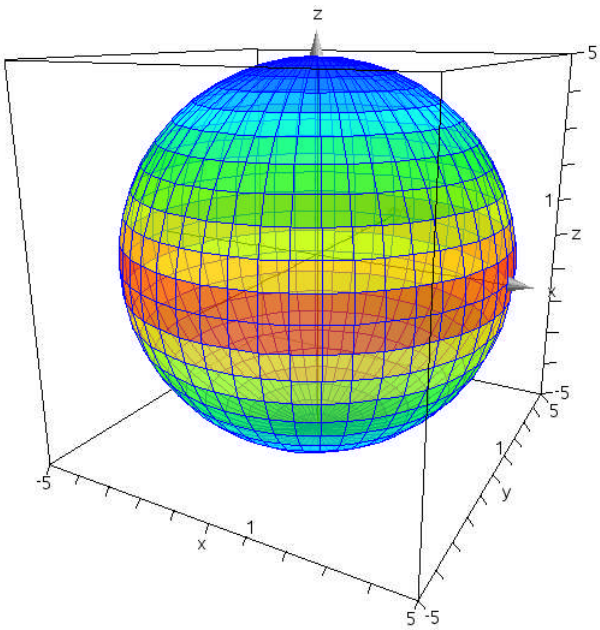
For at få adgang til de 3-dimensionale farvelægningsskemaer højreklikker vi på kuglen og vælger **Farve** > **Brugerdefineret plotfarve …**:



Vi ser da at vi kan skelne mellem inderside og yderside – her kaldet top og bund, samt at vi kan lægge en graduering af regnbuens farver ind over figuren, så farven veksler alt efter højden eller stejlheden. Læg mærke til at disse betegnelser er valgt ud fra grafplotningen af 2-dimensionale funktioner $z = f(x, y)$og svarer til at lege tampen brænder! Her viser vi det for kuglen:

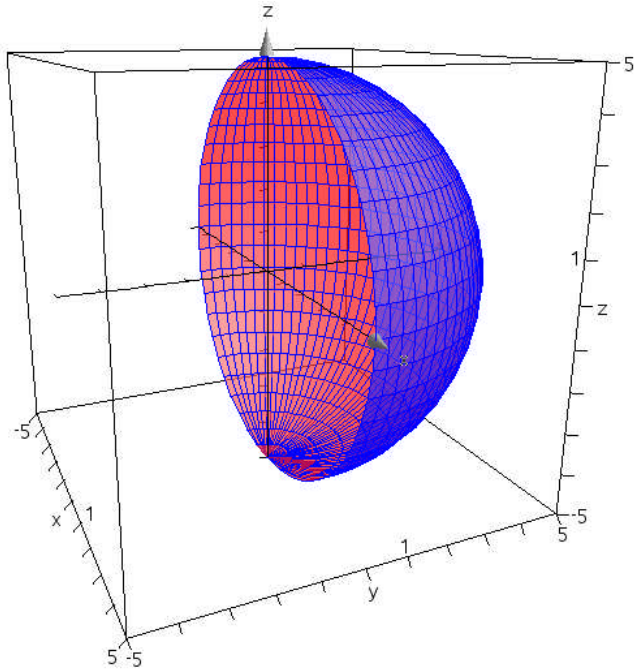


Graduering efter højde:
Lav = blå = kold, høj = rød = varm

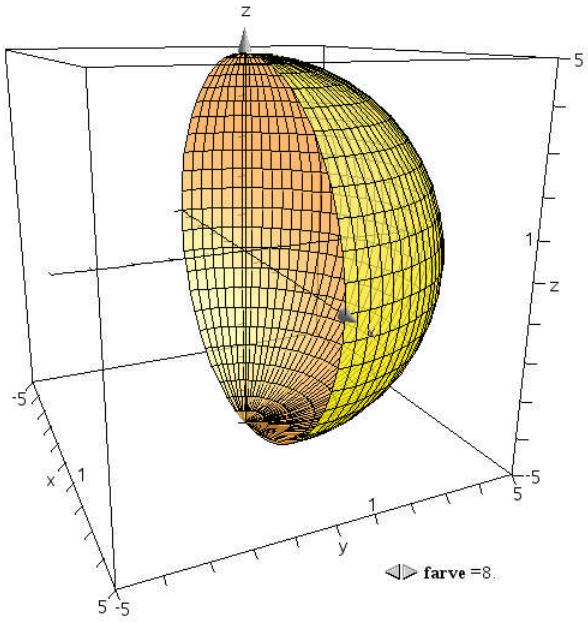


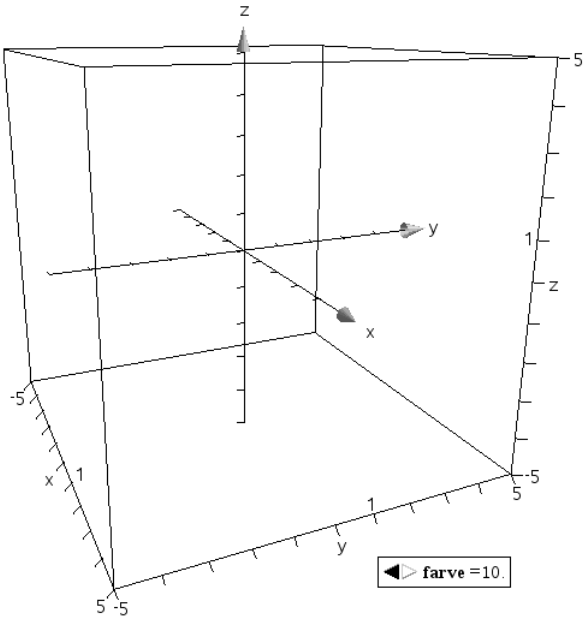
Graduering efter stejlhed:
Vandret = blå = kold, lodret = rød = varm

Hvis vi skal se forskellen på inderside og yderside er vi nødt til at skifte til en halvkugle, så vi kan kigge ind! Det kan gøres ved at pille i parameterintervallerne, men her viser vi en teknik, hvor vi i stedet ændrer på parameterfremstillingen. Erstatter vi fx parameteren t med $\frac{1}{2}t$ fås kun den halve kugle: Derefter skifter vi farvelægning til top = inderside = rød og Bund = yderside = blå:



Det er top-bund farvelægningen, der kan gøres betinget ved at indføre et farveindeks. Vi højreklikker og vælger **Betingelser**:

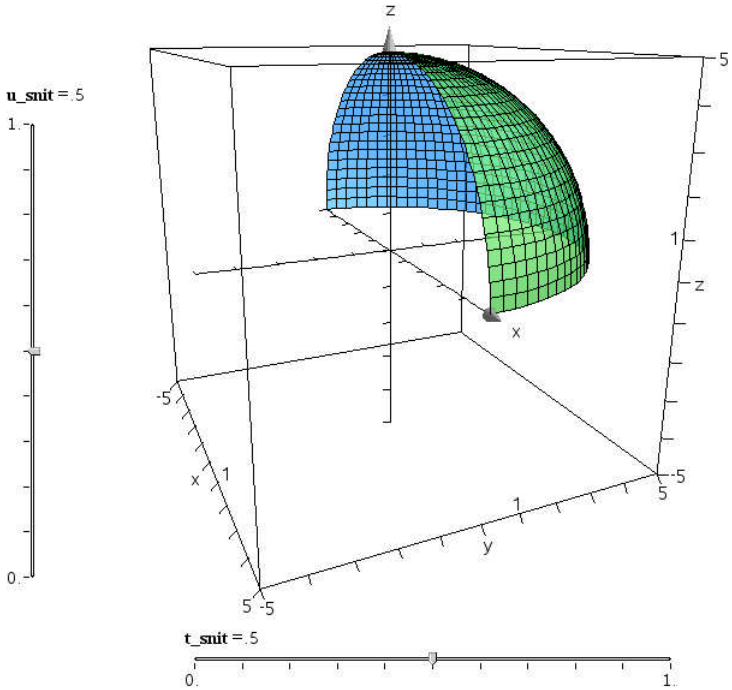




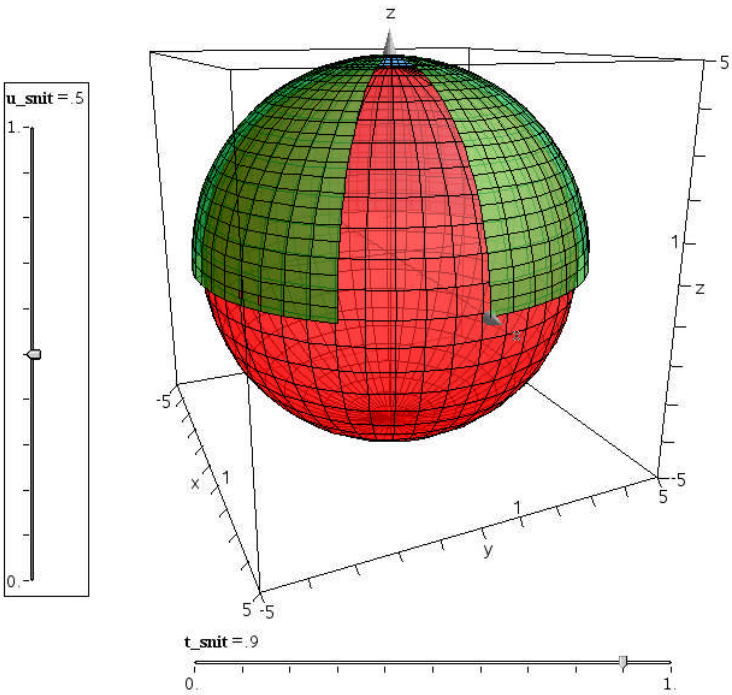
Læg mærke til at når variablen **farve** når værdien 10 forsvinder figuren! Betinget farvelægning kan altså også bruges til at lade figurer opstå og forsvinde!

1.4 Udsnit af kuglen

Vi slutter vores diskussion af kuglen med at vise hvordan man kan lave nogle simple kugleudsnit ved at frembringe nogle simple snit i parametrene. Vi indfører derfor to ny skydervariable **t_snit** og **u_snit**, der løber fra 0 til 1 og angiver hvor stort et udsnit af parameterintervallet vi ønsker at vise frem. Vi erstatter altså parametren *t* med **t_snit**·*t* og parameteren *u* med **u_snit**·*u*:



Når vi trækker i **t_snit** lægger vi derfor et lodret kuglesnit som bevæger sig rundt om z-aksen. Når vi trækker i **u_snit** lægger vi et vandret kuglesnit, som bevæger sig lodret ned fra Nordpolen til Sydpolen. Her løber *t*-snittene altid langs *meridianerne*, som er storcirkler. Men *u*-snittene løber langs lillecirkler undtagen for **u_snit** = ½, hvor den løber langs ækvator. Hvis vi skal tegne sfæriske trekanter skal vi altså finde en mere generel måde at snitte på! Vi kan endda lægge en kugle indenfor (med en radius der er 0.25 mindre), så man kan se hvordan den yderste kugle trækkes ovenpå den inderste kugle og derigennem illustrere betydningen af de sfæriske koordinater.



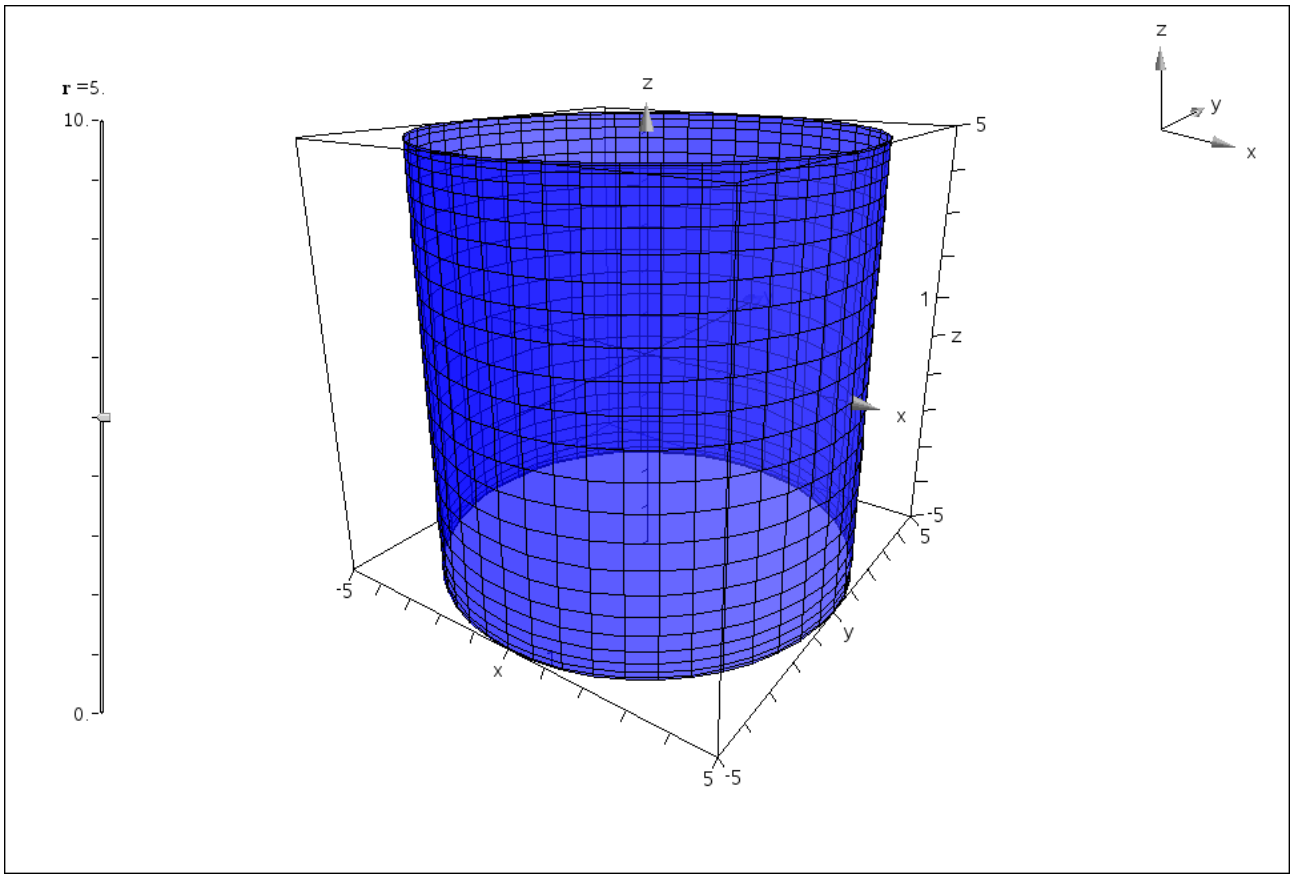
2. Cylinderen

Vi vender tilbage til den generelle parameterfremstilling

$$\begin{cases} xp1(t) = f(u)\cdot\cos(t) \\ yp1(t) = f(u)\cdot\sin(t) \\ zp1(t) = g(u) \end{cases}$$

Her angiver $f(u)$ afstanden fra z-aksen, mens $g(u)$ angiver højden langs z-aksen.
Hvis vi vil frembringe en parameterfremstilling for en cylinder med z-aksen som symmetriakse skal vi derfor holde $f(u)$ konstant lig med cylinderens radius r. Hvis højden af cylinderen netop er $2r$, svarende til at kuglen med radius r er indskrevet i cylinderen kan vi bibeholde udtrykket for højden, dvs. sætte $g(u) = r\cdot\cos(u)$. Derved kommer u stadigvæk til at fungere som vinklen med z-aksen og dermed kommer u til at passe med den tilsvarende breddegrad på kuglen! Parameterfremstillingen for cylinderen bliver altså

$$\begin{cases} xp1(t) = r\cdot\cos(t) \\ yp1(t) = r\cdot\sin(t) \\ zp1(t) = r\cdot\cos(u) \end{cases}$$



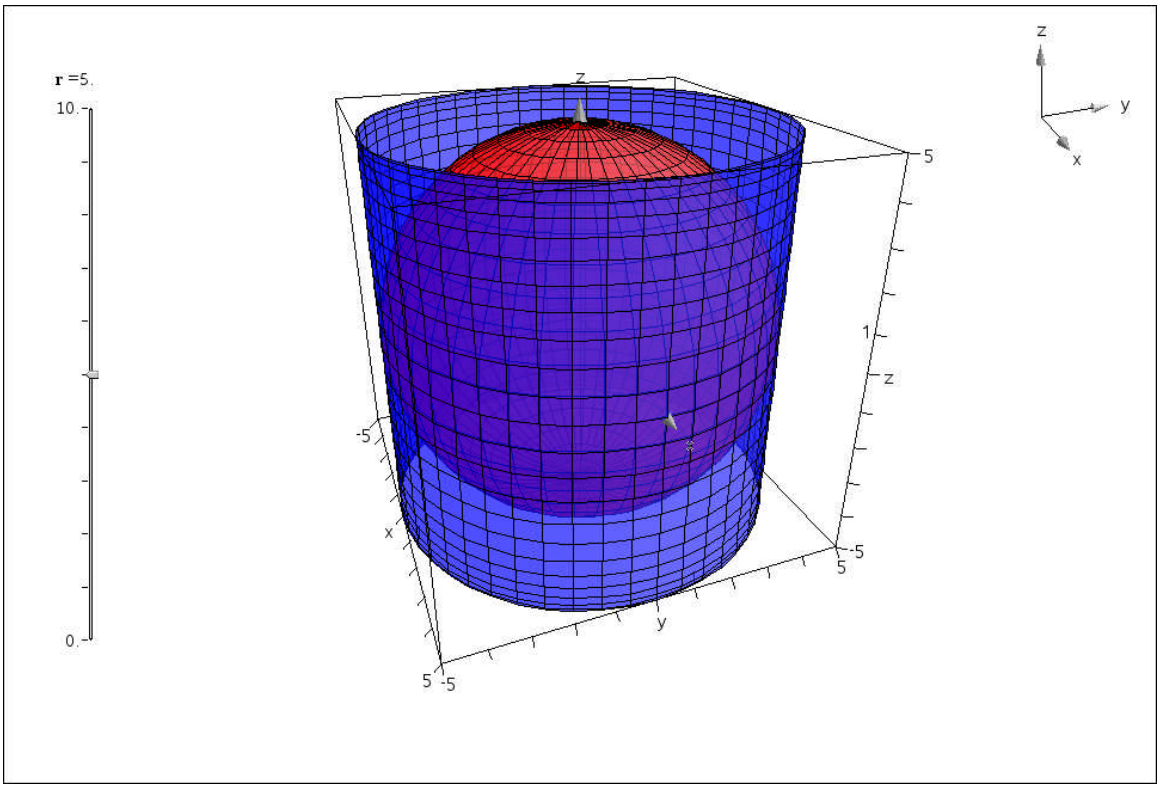
Vi vælger attributter og sætter cylinderen til de samme gitterinddelinger som kuglen, dvs. 48 gitterintervaller for t (svarende til 49 gitterpunkter) og 24 gitterintervaller for u (svarende til 25 gitterpunkter). Hvis vi udfolder cylinderen og bruger den til at kortlægge Jorden med, svarer det til den såkaldte Peters projektion. Det vender vi tilbage til!

2.1 Den indskrevne kugle: Cylinderprojektionen

Vi kan nu sammenligne cylinderen med den indskrevne kugle, idet vi tilføjer parameterfremstillingen for kuglen:

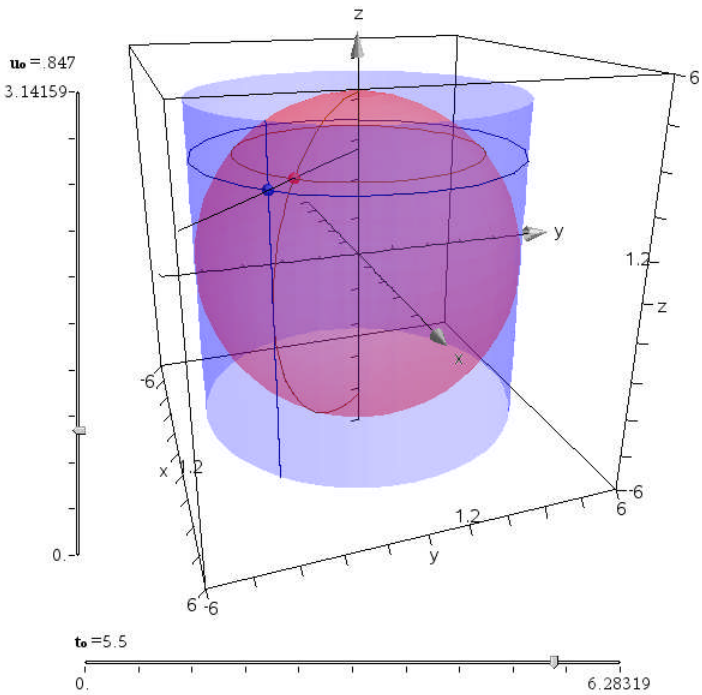
$$\begin{cases} xp2(t) = r \cdot \sin(u) \cdot \cos(t) \\ yp2(t) = r \cdot \sin(u) \cdot \sin(t) \\ zp2(t) = r \cdot \cos(u) \end{cases}$$

For at undgå farveinterferens sætter vi dog kuglens radius ned med 0.01!



Vi har anvendt de samme gitterinddelinger for kugle og cylinder. Vi har også anvendt den samme parametrisering af de to flader, så *t* svarer i begge tilfælde til vinklen rundt om z-aksen og *u* til vinklen med *z*-aksen. Vi kan derfor projicere kuglen over på cylinderen ud fra *z*-aksen ved at kuglepunktet projiceres over i cylinderpunktet med samme højde og samme vinkel, dvs. langs den vandrette linje gennem kuglepunktet, der står vinkelret på *z*-aksen. Det kaldes en *cylinderprojektion*. Vi kan visualisere cylinderprojektionen på to måder. Vi kan tegne den som halvlinjen gennem kuglepunktet (t_0,u_0) , der står vinkelret på *z*-aksen.

Det kræver som vist en del benarbejde. Vi slukker for nettene og sætter op for transparensen! Så tilføjer vi skydere for de to parameterværdier t_0 og u_0.



Endelig tilføjer vi parameterfremstillinger for halvlinjen, startpunktet på kuglen (der tegnes som en lille rød kugle med radius 0.15) og punktet på cylinderen (der tegnes som en lille blå kugle med radius 0.15). Endelig har vi tilføjet parameterfremstillinger for breddecirkler og meridiancirkler på såvel kugle og cylinder for at tydeliggøre afbildningsstrukturen:

Halvlinjen gennem punktet med de sfæriske parametre (t_0,u_0). Halvlinjen har fået længden 10, så den rækker et stykke ud af scenen.

$$\begin{cases} \mathbf{xp3}(t,u) = \dfrac{t}{2\cdot\pi}\cdot 10\cdot \mathbf{r}\cdot\sin(\mathbf{u_0})\cdot\cos(\mathbf{t_0}) \\ \mathbf{yp3}(t,u) = \dfrac{t}{2\cdot\pi}\cdot 10\cdot \mathbf{r}\cdot\sin(\mathbf{u_0})\cdot\sin(\mathbf{t_0}) \\ \mathbf{zp3}(t,u) = \mathbf{r}\cdot\cos(\mathbf{u_0}) \end{cases}$$

Den lille røde kugle repræsenterer skæringspunktet med kuglen.

$$\begin{cases} \mathbf{xp4}(t,u) = \mathbf{r}\cdot\sin(\mathbf{u_0})\cdot\cos(\mathbf{t_0}) + 0.15\cdot\sin(u)\cdot\cos(t) \\ \mathbf{yp4}(t,u) = \mathbf{r}\cdot\sin(\mathbf{u_0})\cdot\sin(\mathbf{t_0}) + 0.15\cdot\sin(u)\cdot\sin(t) \\ \mathbf{zp4}(t,u) = \mathbf{r}\cdot\cos(\mathbf{u_0}) + 0.15\cdot\cos(u) \end{cases}$$

Den lille blå kugle repræsenterer skæringspunktet med cylinderen.

$$\begin{cases} \mathbf{xp5}(t,u) = \mathbf{r}\cdot\cos(\mathbf{t_0}) + 0.15\cdot\sin(u)\cdot\cos(t) \\ \mathbf{yp5}(t,u) = \mathbf{r}\cdot\sin(\mathbf{t_0}) + 0.15\cdot\sin(u)\cdot\sin(t) \\ \mathbf{zp5}(t,u) = \mathbf{r}\cdot\cos(\mathbf{u_0}) + 0.15\cdot\cos(u) \end{cases}$$

Breddecirkel på kuglen gennem punktet med de sfæriske koordinater (t_0,u_0). Kun *t* varierer.

$$\begin{cases} \mathbf{xp6}(t,u) = \mathbf{r}\cdot\sin(\mathbf{u_0})\cdot\cos(t) \\ \mathbf{yp6}(t,u) = \mathbf{r}\cdot\sin(\mathbf{u_0})\cdot\sin(t) \\ \mathbf{zp6}(t,u) = \mathbf{r}\cdot\cos(\mathbf{u_0}) \end{cases}$$

Meridiancirkel på kuglen gennem punktet med de sfæriske koordinater (t_0,u_0). Kun *u* varierer.

$$\begin{cases} \mathbf{xp7}(t,u) = \mathbf{r}\cdot\sin(u)\cdot\cos(\mathbf{t_0}) \\ \mathbf{yp7}(t,u) = \mathbf{r}\cdot\sin(u)\cdot\sin(\mathbf{t_0}) \\ \mathbf{zp7}(t,u) = \mathbf{r}\cdot\cos(u) \end{cases}$$

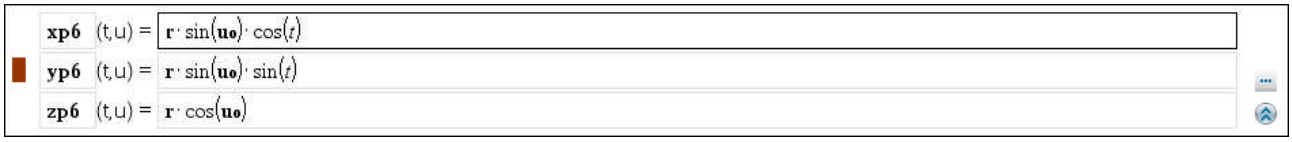
Breddecirkel på cylinderen gennem punktet med de sfæriske koordinater (t_0,u_0). Kun *t* varierer.

$$\begin{cases} \mathbf{xp8}(t,u) = \mathbf{r}\cdot\cos(t) \\ \mathbf{yp8}(t,u) = \mathbf{r}\cdot\sin(t) \\ \mathbf{zp8}(t,u) = \mathbf{r}\cdot\cos(\mathbf{u_0}) \end{cases}$$

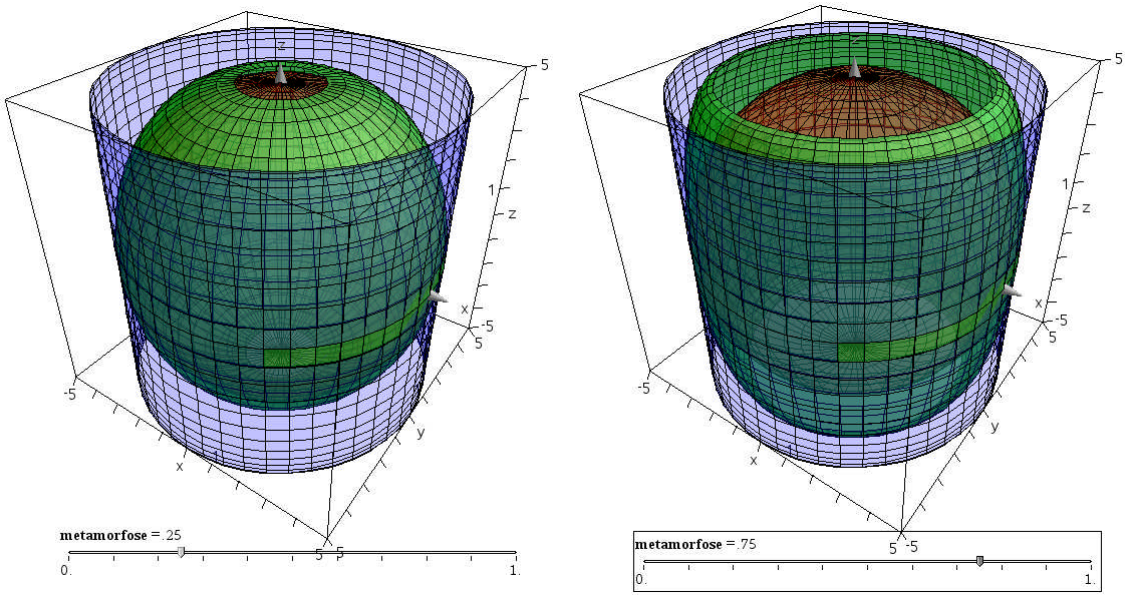
Meridiancirkel på cylinderen gennem punktet med de sfæriske koordinater (t_0,u_0). Kun *u* varierer.

$$\begin{cases} \mathbf{xp9}(t,u) = \mathbf{r}\cdot\cos(\mathbf{t_0}) \\ \mathbf{yp9}(t,u) = \mathbf{r}\cdot\sin(\mathbf{t_0}) \\ \mathbf{zp9}(t,u) = \mathbf{r}\cdot\cos(u) \end{cases}$$

Det vanskeligste ved at håndtere kurver i rummet er sådan set at få adgang til farver og attributter, da man ikke kan gribe fat i dem med musen – de er simpelthen for tynde! I stedet skal man gå ind i grafindtastningslinjen og højreklikke på farveikonet. Så får man adgang til såvel farver som attributter:



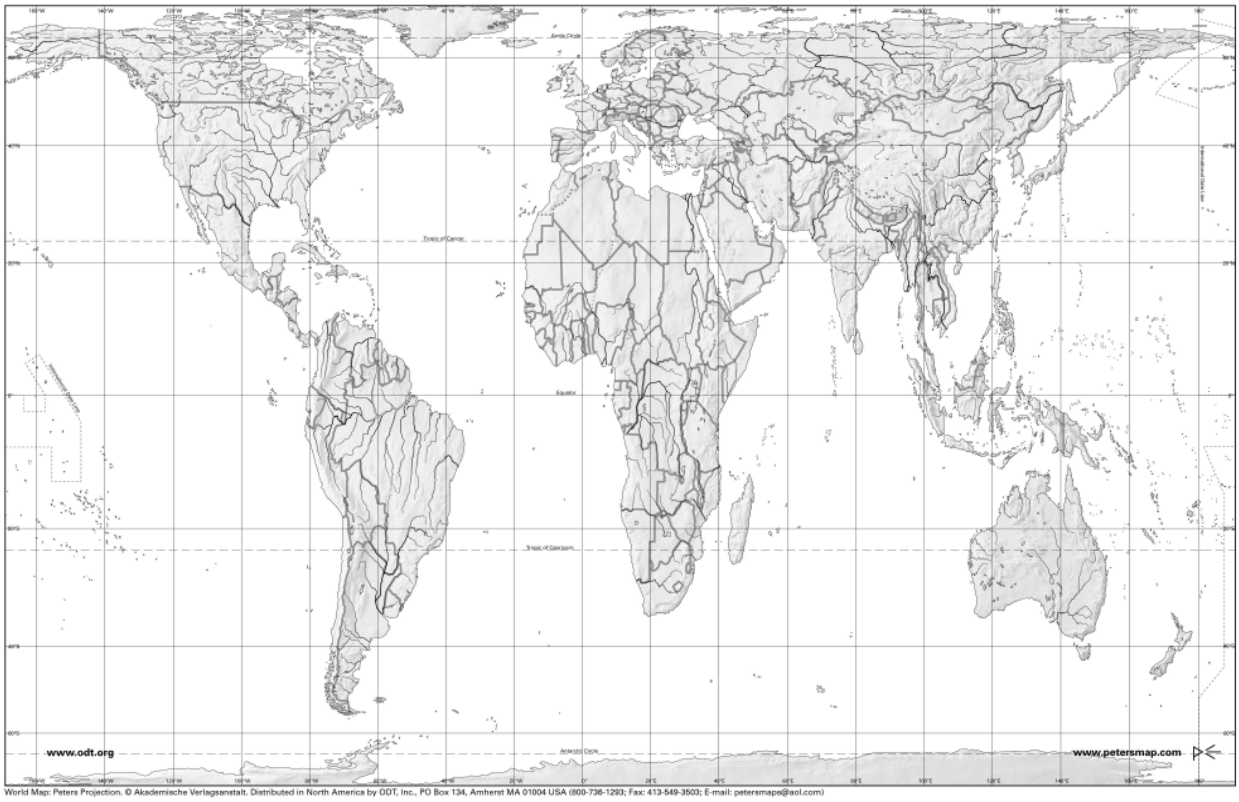
Den anden mulighed er at konstruere en såkaldt *metamorfose* mellem kuglen og cylinderen, hvor man gradvist deformerer kuglen, så den overføres i cylinderen vis de vandrette linjer, der udgår fra z-aksen vinkelret på *z*-aksen. Metamorfosen følger altså nøje projektionen, men i stedet for at udføre projektionen i ét spring udfører den projektionen gradvist. Vi skal så bare indføre en skyder for metamorfosen, der går fra 0 til 1, så vi starter i kuglen ved 0 og slutter i cylinderen ved 1:



Vi benytter da den blandede parameterfremstilling:

$$\begin{cases} \mathbf{xp10}(\mathrm{t},\mathrm{u}) = \mathbf{r}\cdot\sin(u)\cdot\cos(t)\cdot(1-\mathbf{metamorfose})+\mathbf{r}\cdot\cos(t)\cdot\mathbf{metamorfose} \\ \mathbf{yp10}(\mathrm{t},\mathrm{u}) = \mathbf{r}\cdot\sin(u)\cdot\cos(t)\cdot(1-\mathbf{metamorfose})+\mathbf{r}\cdot\cos(t)\cdot\mathbf{metamorfose} \\ \mathbf{zp10}(\mathrm{t},\mathrm{u}) = \mathbf{r}\cdot\cos(u) \end{cases}$$

Du skulle nu gerne have fået en god fornemmelse for cylinderprojektionen. Hvis den anvendes på Jordkloden fås det såkaldte Gall-Peters kort:



2.2 Cylinderprojektionen er arealbevarende: Overfladen af en kugle

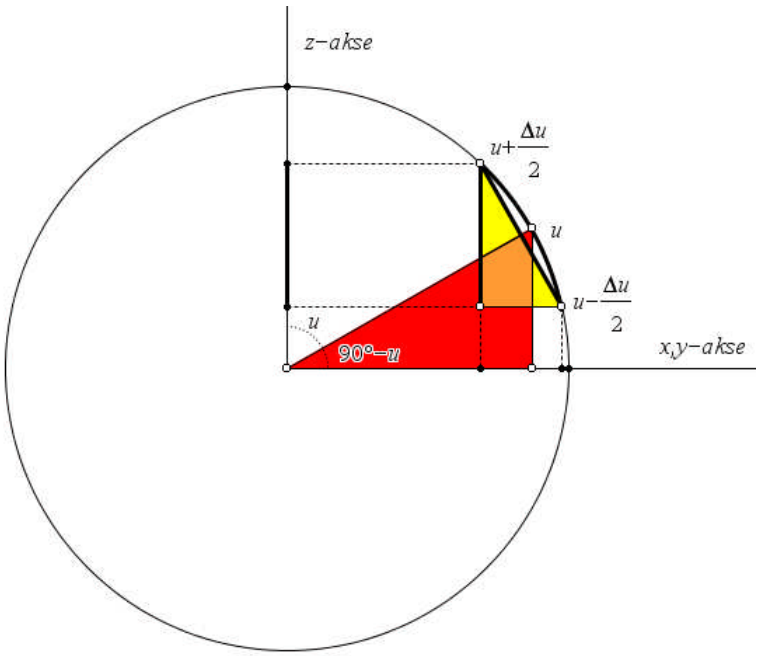
Her kommer så hovedsætningen (fra et matematisk synspunkt):

Den ovenstående cylinderprojektion bevarer arealer, dvs. ethvert udsnit på kuglen indesluttet af meridianer og breddecirkler overføres i te tilsvarende udsnit på cylinderen med præcis det samme areal!

Begrundelsen er meget simpel:
Først kigger vi på projektionen af en vandret breddecirkel. Da breddecirklen på kuglen har radius $r \cdot \sin(u)$ og breddecirklen på cylinderen har radius *r*, er den vandrette forstørrelsesfaktor netop givet ved $\frac{1}{\sin(u)}$.

Dernæst kigger vi på projektionen af en lodret meridian. Den er mere kompliceret, da den afhænger af højden, i det de lodrette længder skrumper mere og mere jo mere vi nærmer os polerne. Kigger vi på et lille buestykke med længden Δu på kuglen så vil det overføres i et lille linjestykke $\cos(u) - \cos(u + \Delta u) = -\Delta \cos(u)$ på cylinderen. Den lodrette forstørrelsesfaktor er derfor givet ved $\frac{-\Delta \cos(u)}{\Delta u} = -\cos'(u) = \sin(u)$.

Det kan man også vise med en figurbetragtning uden brug af differentialregning:



Den røde trekant og den gule trekant er ensvinklede: De er begge retvinklede og deres hypotenuser står vinkelret på hinanden, mens kateterne er indbyrdes parallelle. Vi genfinder derfor vinklen *u* i bunden af den gule trekant. Forholdet mellem den lodrette katete (cylinderstykket) og hypotenusen (der er meget tæt på kuglestykket) er derfor givet ved:

$$\textit{Forstørrelsesfaktor} = \frac{\text{lodret katete}}{\text{cirkelbue}} \approx \frac{\text{lodret katete}}{\text{hypotenuse}} = \sin(u)$$

Dvs. den lokale lodrette og vandrette forstørrelsesfaktor er reciprokke, hvorfor deres produkt er konstant! Men det betyder jo netop at arealet bevares: De vandrette grundlinjer strækkes, de lodrette højder skrumper, men tilsammen bevares arealet, fordi den ene bliver præcis lige så mange gange mindre, som den anden bliver større. Men så må kuglen og cylinderen jo have præcis den samme *krumme overflade*, dvs. kuglens krumme overflade må være givet ved

$$\textit{Overflade}_{kugle} = \textit{Overflade}_{cylinder,krum} = \textit{Omkreds}_{cylinder} \cdot \textit{højde}_{cylinder} = (2\pi \cdot r) \cdot (2r) = 4\pi r^2$$

Kuglens overflade er derfor præcis fire gange så stort som arealet af ækvatorcirklen: $O_{kugle} = 4\pi r^2$.

Læg også mærke til at hvis vi lukker cylinderen i toppen og bunden bliver den samlede overflade for cylinderen netop $4\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r^2 = 6\pi \cdot r^2$. Kuglens overflade er altså netop 2/3 gange så stor som cylinderens samlede overflade. Det er bemærkelsesværdigt at præcis det samme gælder for rumfangene. Men det vender vi tilbage til lige om lidt!

2.3 Udfoldningen af en cylinder: Den krumme overflade af en cylinder

Her vil vi lige afklare formlen for den krumme overflade af cylinderen. Den kommer fra en udfoldning af cylinderen, dvs. man skære den op langs en meridian og folder den ud så den er flad. En udfoldning er en meget stærk afbildning, hvor man ikke bare bevarer arealer men også længder og vinkler, dvs. hele geometrien bevares i udfoldningen. Det er ikke alle figurer, der kan udfoldes. En kugle kan fx ikke udfoldes fordi den er krum, men cylinderen og keglen kan – ligesom man kan udfolde polyedre.

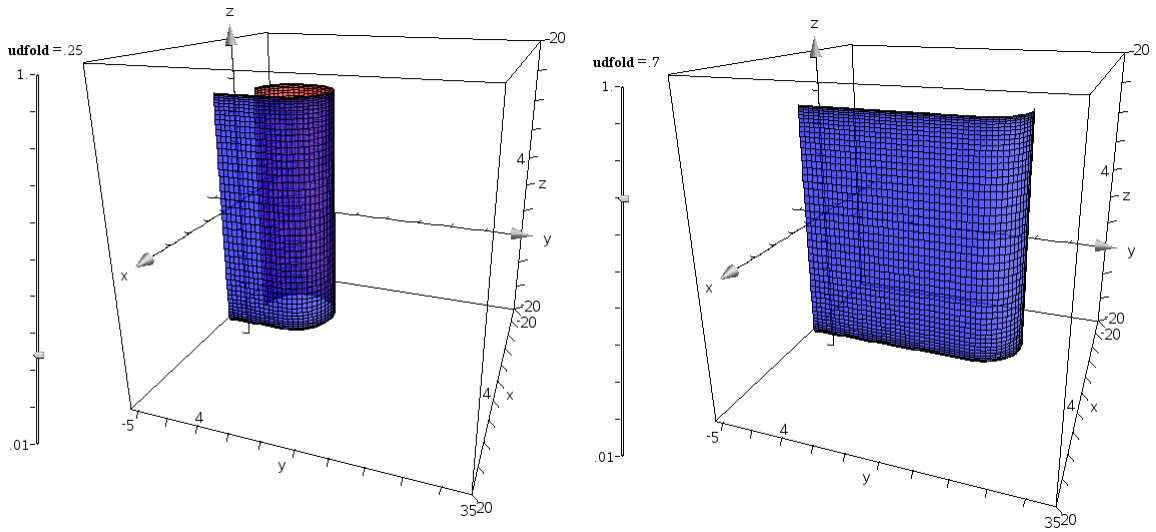
Vi kan visualisere udfoldningen, men det kræver et nyt trick, da vi skal bygge parameterfremstillingen op af to omgange: én del, der giver det flade stykke, og én del, der giver det resterende krumme stykke. Det klarer man normalt med en betinget kommando, men de er *ikke* tilladt i 3-dimensionale grafforskrifter, så i stedet introducerer vi Heavyside funktionen:

$$H(x) := \frac{1}{2} \cdot (1 + sign(x))$$

Den er 0 for negative argumenter og 1 for positive argumenter. Hvis man skal sy to forskrifter sammen kan det nu nemt gøres med en Heavysidefunktion, fx

$$\begin{cases} f(x), x < a \\ g(x), x > a \end{cases} = H(a-x) \cdot f(x) + H(x-a) \cdot g(x)$$

Når x er mindre end a er det kun det første led, der giver et bidrag, nemlig $f(x)$, og når x er større end a er det kun det andet led, der bidrager, nemlig $g(x)$. Vi strækker cylinderen lidt i lodret retning og udvider scenen pasende, så der bliver plads til en ordentlig udfoldning:



xp11	(t,u) =	$\mathbf{r} \cdot \mathbf{h}(2 \cdot \pi \cdot \mathbf{udfold} - t) + \mathbf{r} \cdot \cos(t - 2 \cdot \pi \cdot \mathbf{udfold}) \cdot \mathbf{h}(t - 2 \cdot \pi \cdot \mathbf{udfold})$
yp11	(t,u) =	$\mathbf{r} \cdot t \cdot \mathbf{h}(2 \cdot \pi \cdot \mathbf{udfold} - t) + (\mathbf{r} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \mathbf{udfold} + \mathbf{r} \cdot \sin(t - 2 \cdot \pi \cdot \mathbf{udfold})) \cdot \mathbf{h}(t - 2 \cdot \pi \cdot \mathbf{udfold})$
zp11	(t,u) =	$3 \cdot \mathbf{r} \cdot \cos(u)$

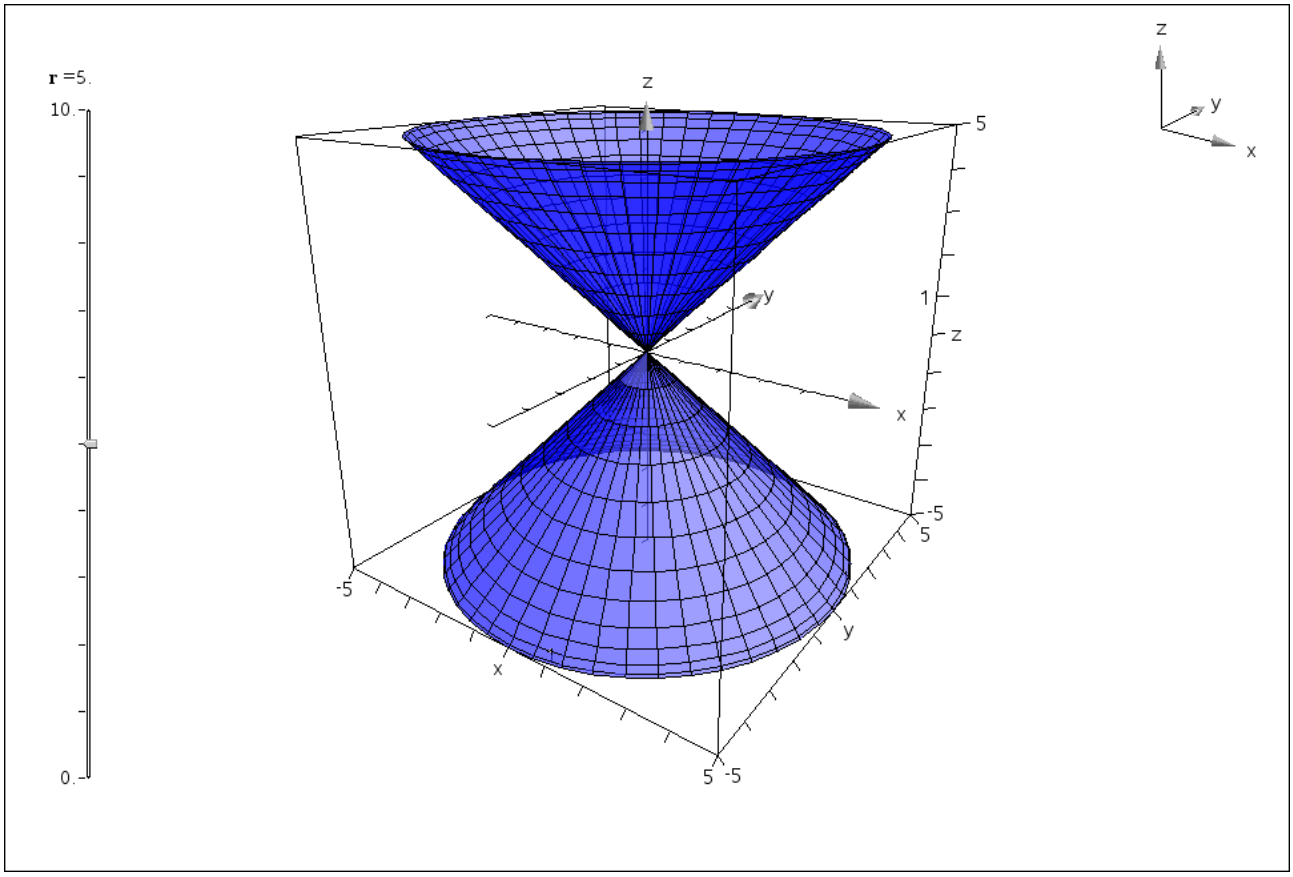
3. Keglen

Vi vender igen tilbage til den generelle parameterfremstilling

$$\begin{cases} xp1(t) = f(u)\cdot\cos(t) \\ yp1(t) = f(u)\cdot\sin(t) \\ zp1(t) = g(u) \end{cases}$$

Her angiver $f(u)$ afstanden fra z-aksen, mens $g(u)$ angiver højden langs z-aksen.
Hvis vi vil frembringe en parameterfremstilling for en dobbeltkegle med z-aksen som symmetriakse skal vi derfor sætte den vandrette afstand fra z-aksen $f(u)$ lig med højden over x-y-planen $g(u)$. Hvis højden af dobbeltkeglen netop er $2r$, svarende til at dobbeltkeglen kan indskrives i cylinderen kan vi bibeholde udtrykket for højden, dvs. sætte $g(u) = r\cdot\cos(u)$. Derved kommer u stadigvæk til at fungere som vinklen med z-aksen og dermed kommer u til at passe med den tilsvarende breddegrad på kuglen! Parameterfremstillingen for dobbeltkeglen bliver altså

$$\begin{cases} xp1(t) = r\cdot\cos(u)\cdot\cos(t) \\ yp1(t) = r\cdot\cos(u)\cdot\sin(t) \\ zp1(t) = r\cdot\cos(u) \end{cases}$$

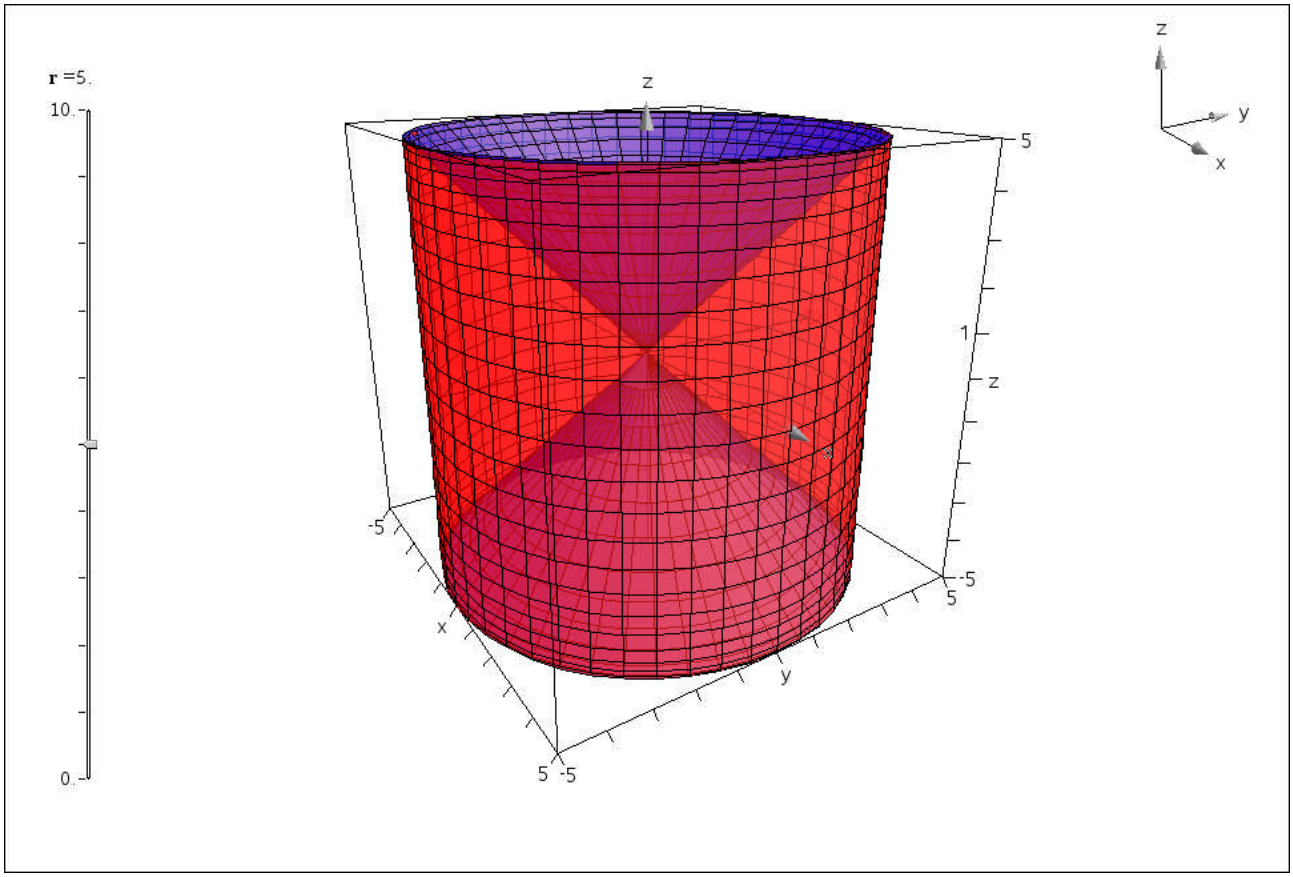


Vi vælger attributter og sætter dobbeltkeglen til de samme gitterinddelinger som kuglen og cylinderen, dvs. 48 gitterintervaller for t (svarende til 49 gitterpunkter) og 24 gitterintervaller for u (svarende til 25 gitterpunkter).

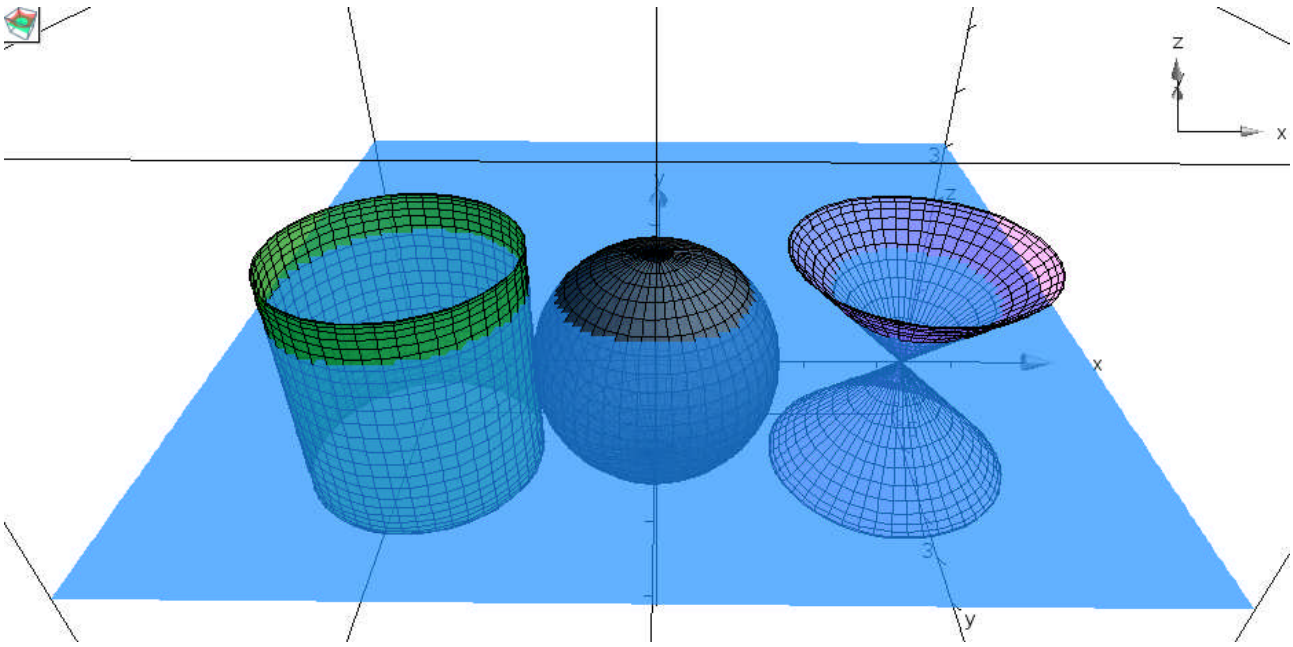
3.1 Cavalieri/Arkimedes bevis for kuglens rumfang

Vi kan nu sammenligne dobbeltkeglen med den omskrevne cylinder, idet vi tilføjer parameterfremstillingen for cylinderen:

$$\begin{cases} xp2(t) = r \cdot \cos(t) \\ yp2(t) = r \cdot \sin(t) \\ zp2(t) = r \cdot \cos(u) \end{cases}$$



Men det mest overraskende resultat fås ved at sammenholde dobbeltkeglen med såvel kuglen som cylinderen! For at gøre illustrationen mere overskuelig placerer vi de tre figurer side om side:



Hvis vi nu sporer figurerne, dvs. kører et vandret plan op gennem figurerne (der er blevet gjort mere transparente for bedre at vise skæringen med den vandrette plan), så vil vi få frembragt tre skæringscirkler med radierne

Cylindersnittet:	**r**
Kuglesnittet:	**r** ·sin(u)
Keglesnittet:	**r**·cos(u)

Men det har den overraskende konsekvens at summen af tværsnitsarealerne for kuglen og keglen netop matcher tværsnitarealet for cylinderen:

$$\begin{aligned}
&Tværsnit_{Kegle} + Tværsnit_{Kugle} = \\
&\pi \cdot \left(r \cdot \cos(u)\right)^2 + \pi \cdot \left(r \cdot \cos(u)\right)^2 = \\
&\pi \cdot r^2 \cdot \left(\cos(u)^2 + \sin(u)^2\right) = \\
&\pi \cdot r^2 \cdot 1 = Tværsnit_{Cylinder}
\end{aligned}$$

Men det har igen som konsekvens at rumfanget af cylinderen netop må være summen af rumfangene for kuglen og keglen! Men rumfanget for dobbeltkeglen er netop 1/3 af rumfanget for cylinderen:

$$\begin{aligned}
V_{dobbeltkegle} &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \\
V_{Cylinder} &= G \cdot h = \left(\pi \cdot r^2\right) \cdot \left(2r\right) = 2 \cdot \pi \cdot r^3
\end{aligned}$$

Heraf følger at kuglens rumfang må være de resterende 2/3 af cylinderens rumfang, dvs. kuglen har rumfanget:

$$V_{kugle} = \frac{2}{3} \cdot V_{Cylinder} = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Kuglens rumfang er derfor præcis to tredjedele gange så stort som rumfanget af den omskrevne cylinder:

$$V_{kugle} = \frac{2}{3} \cdot V_{Cylinder} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 .$$

Der findes altså nogle overraskende sammenhænge mellem cylinderen, kuglen og keglen.

3.2 Udfoldningen af en kegle: Keglens krumme overflade

Ligesom cylinderen kan keglen udfoldes til en plan figur, hvilket giver mulighed for at finde dens krumme overflade. For simpelhedens skyld udfolder vi kun den øverste af keglerne i dobbeltkeglen. Vi viser det med en lidt simplere teknik end den vi brugte for udfoldningen af cylinderen, hvor vi samlede det hele i én parameterfremstilling. Her benytter vi to parameterfremstillinger: Én for keglen, der forsvinder lidt efter lidt og én for viften, der dukker op lidt efter lidt. For at gøre det nemmere at se udfoldningen er keglen farvet blå og viften farvet rød. De to parameterfremstilligner ser således ud:

Enkelt-Keglen:

$$\mathbf{xp1}(t,u) = 3\cdot\cos\left(t\cdot(1-\mathbf{udfold})\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot u\right)$$

$$\mathbf{yp1}(t,u) = 3\cdot\sin\left(t\cdot(1-\mathbf{udfold})\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot u\right)$$

$$\mathbf{zp1}(t,u) = 3\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot u\right)$$

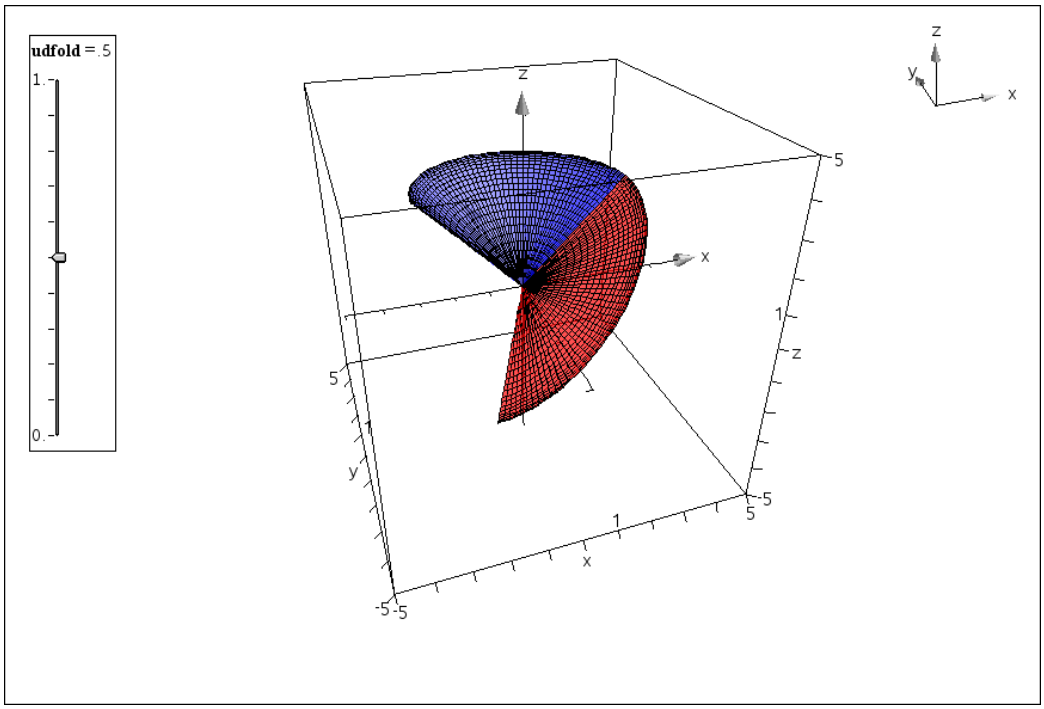
Viften:

$$\mathbf{xp2}(t,u) = 3\cdot\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\cdot\mathbf{udfold}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot u\right)$$

$$\mathbf{yp2}(t,u) = -3\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\cdot\mathbf{udfold}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot u\right)$$

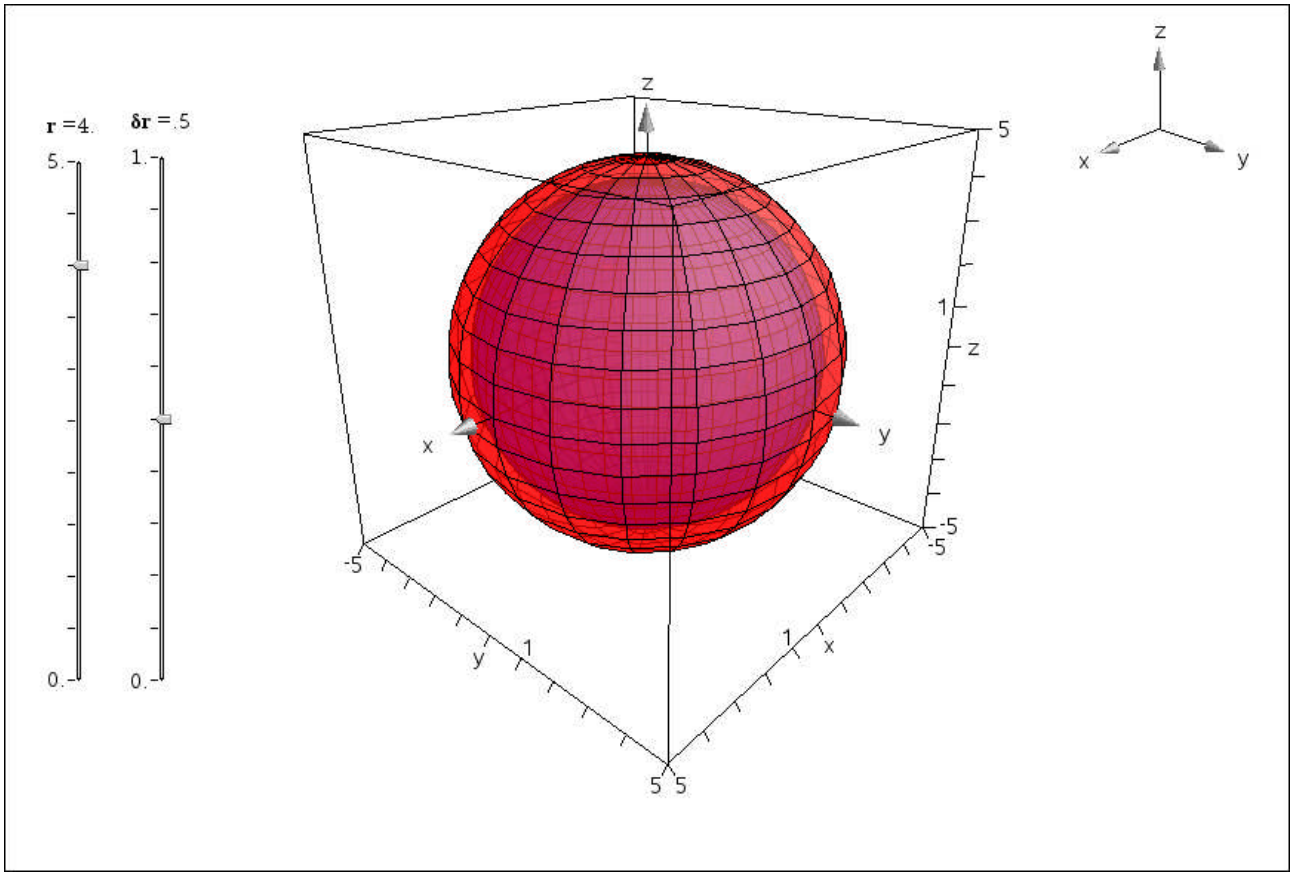
$$\mathbf{zp2}(t,u) = 3\cdot\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\cdot\mathbf{udfold}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot u\right)$$

Bemærkning: Der er sat ½ foran parameteren *u* for kun at tegne den øverste kegle, henholdsvis den øverste vifte! Parameteren *t* er divideret med $\sqrt{2}$ i parameterfremstillingen for viften, fordi keglen *ikke* udfoldes til en hel cirkel men kun et cirkeludsnit, men den samme buelængde! Da radius i keglens topcirkel er 3 er den samlede buelængde $3\cdot 2\pi$, men viften har radius $3\sqrt{2}$ og derfor skal buelængden for viften tilsvarende skaleres ned med $\sqrt{2}$.



3.3 Sammenhæng mellem rumfang og overflade for cylinder, kugle og kegle

Vi kan kaste endnu et lys over de fundne formler for rumfang og overflade, ved at betragte afhængigheden af radius r, der fastlægger størrelsen af kuglen, keglen og cylinderen.



Vi ser først på **kuglen:** Hvis vi giver radius r en lille tilvækst Δr, så vokser kuglen i alle retninger med et lag, der netop har tykkelsen Δr. Tilvæksten i rumfang er derfor med god tilnærmelse givet ved $\Delta V \approx G \cdot h \approx O(r) \cdot \Delta r$. Deraf fås

$$\frac{\Delta V}{\Delta r} \approx O(r) \text{, dvs. i grænsen fås } V'(r) = O(r)$$

Differentierer man rumfanget fås altså overfladen og omvendt. Det er altså nok at kende den ene af formlerne! Det passer fint med de fundne formler idet r^2 netop har stamfunktionen $1/3 \cdot r^3$

$$V(r) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad \text{og} \quad O(r) = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

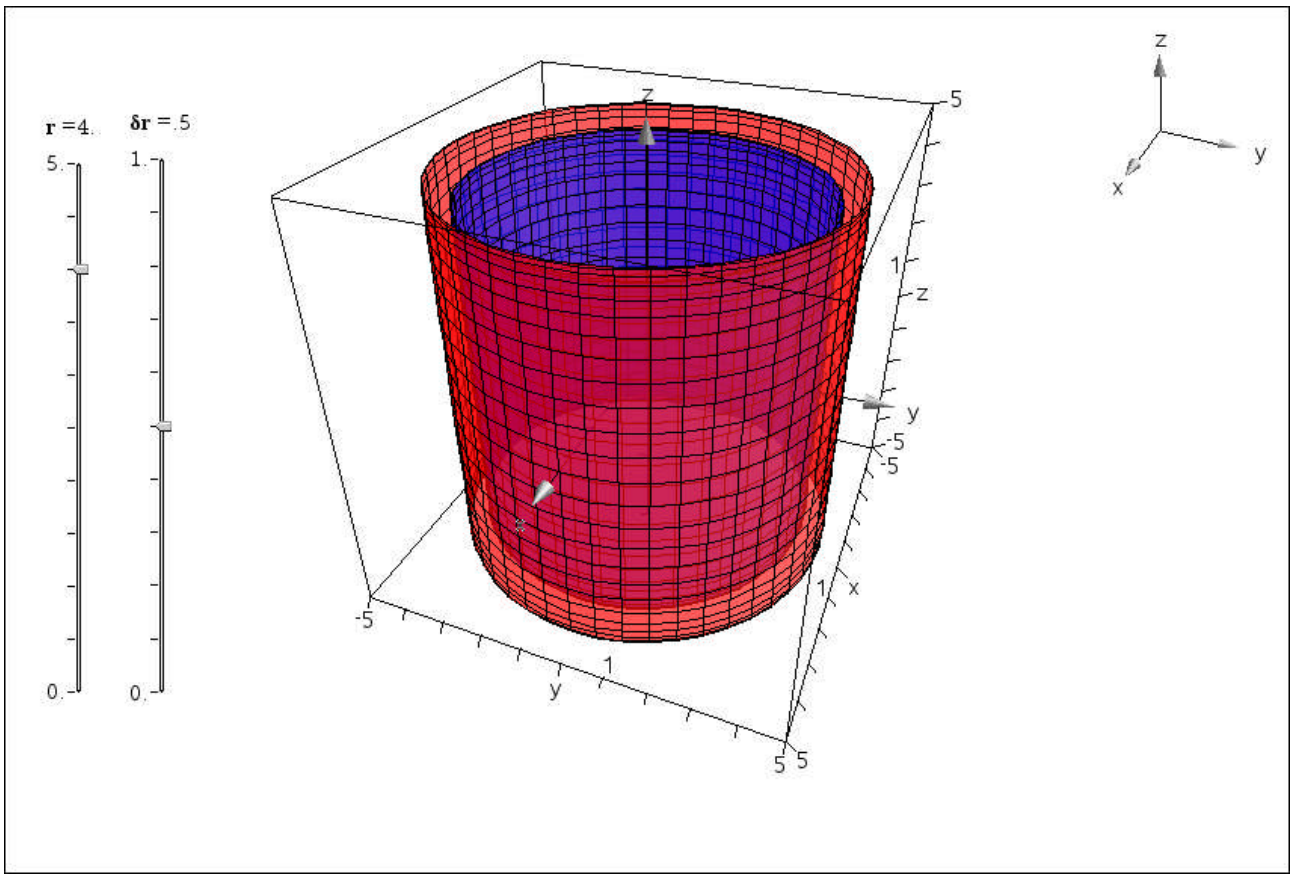
I tilfældet med kuglen argumenter man ofte uden at gøre brug af differential- og integralregning. Hvis man vælger et lille cirkeludsnit på overfladen med arealet ΔO og forbinder udsnittet med centrum fås en kegle med rumfanget:

$$V_{kegle,udsnit} = \frac{1}{3} \cdot \Delta O \cdot r$$

Lægger man alle udsnittene sammen fås kuglens samlede rumfang og dermed

$$V_{kugle} = \sum V_{kegle,udsnit} = \sum \frac{1}{3} \cdot \Delta O \cdot r = \frac{1}{3} \cdot \left(\sum \Delta O \right) \cdot r = \frac{1}{3} \cdot O_{kugle} \cdot r \,,$$

hvilket fører til de samme sammenhænge!

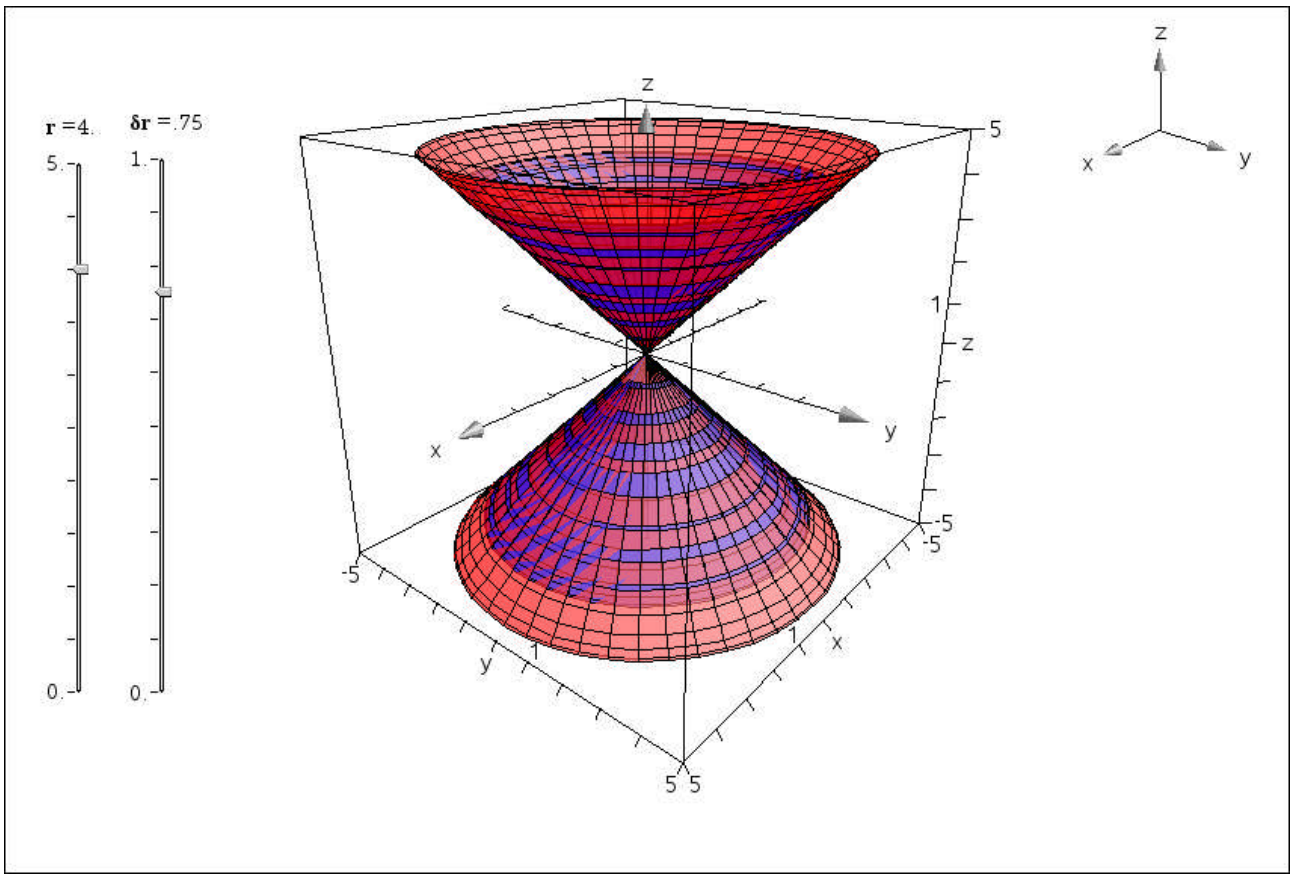


Vi ser dernæst på **cylinderen** med radius r og højde $2r$: Hvis vi giver radius r en lille tilvækst Δr, så vokser cylinderen både i bredden og i toppen og bunden med lag, der har tykkelsen Δr. Tilvæksten i rumfang er derfor med god tilnærmelse givet ved $\Delta V \approx G \cdot h \approx O_{\text{samlet}}(r) \cdot \Delta r$, hvor $O_{\text{samlet}}(r)$ både dækker den krumme overflade og cirklerne i toppen og bunden. Deraf fås

$$\frac{\Delta V}{\Delta r} \approx O_{\text{samlet}}(r)\text{, dvs. i grænsen fås } V'(r) = O_{\text{samlet}}(r).$$

Differentierer man rumfanget fås altså den samlede overflade og omvendt. Det er altså nok at kende den ene af formlerne! Det passer fint med de fundne formler idet r^2 netop har stamfunktionen $1/3 \cdot r^3$

$$V(r) = 2 \cdot \pi \cdot r^3 \quad \text{og} \quad O(r) = 6 \cdot \pi \cdot r^2$$



Endelig ser vi på **den retvinklede dobbeltkegle** med radius *r* og højde *r*: Hvis vi giver radius *r* en lille tilvækst Δr, så vokser dobbeltkeglen *kun* i toppen og bunden med lag, der har tykkelsen Δr. Tilvæksten i rumfang er derfor med god tilnærmelse givet ved $\Delta V \approx G \cdot h \approx O_{\text{top+bund}}(r) \cdot \Delta r$, hvor $O_{\text{top+bund}}(r)$ kun dækker overfladen hørende til cirklerne i toppen og bunden. Deraf fås

$$\frac{\Delta V}{\Delta r} \approx O_{\text{top+bund}}(r)\text{, dvs. i grænsen fås } V'(r) = O_{\text{top+bund}}(r)$$

Differentierer man rumfanget fås altså kun top og bundfladen og omvendt. Det er altså nok at kende den ene af formlerne! Det passer fint med de fundne formler idet r^2 netop har stamfunktionen $1/3 \cdot r^3$

$$V(r) = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad \text{og} \quad O_{\text{top+bund}}(r) = 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

Bemærkning: Denne gang kan vi ikke slippe for farveinterferens, fordi de to dobbeltkegler ligger lige oven i hinanden!

Læg til slut mærke til at cylinderens rumfang er summen af kuglens rumfang og dobbeltkeglens rumfang, dvs. der gælder

$$V_{cylinder}(r) = V_{kugle}(r) + V_{kegle}(r)$$

Ved differentiation fås derfor

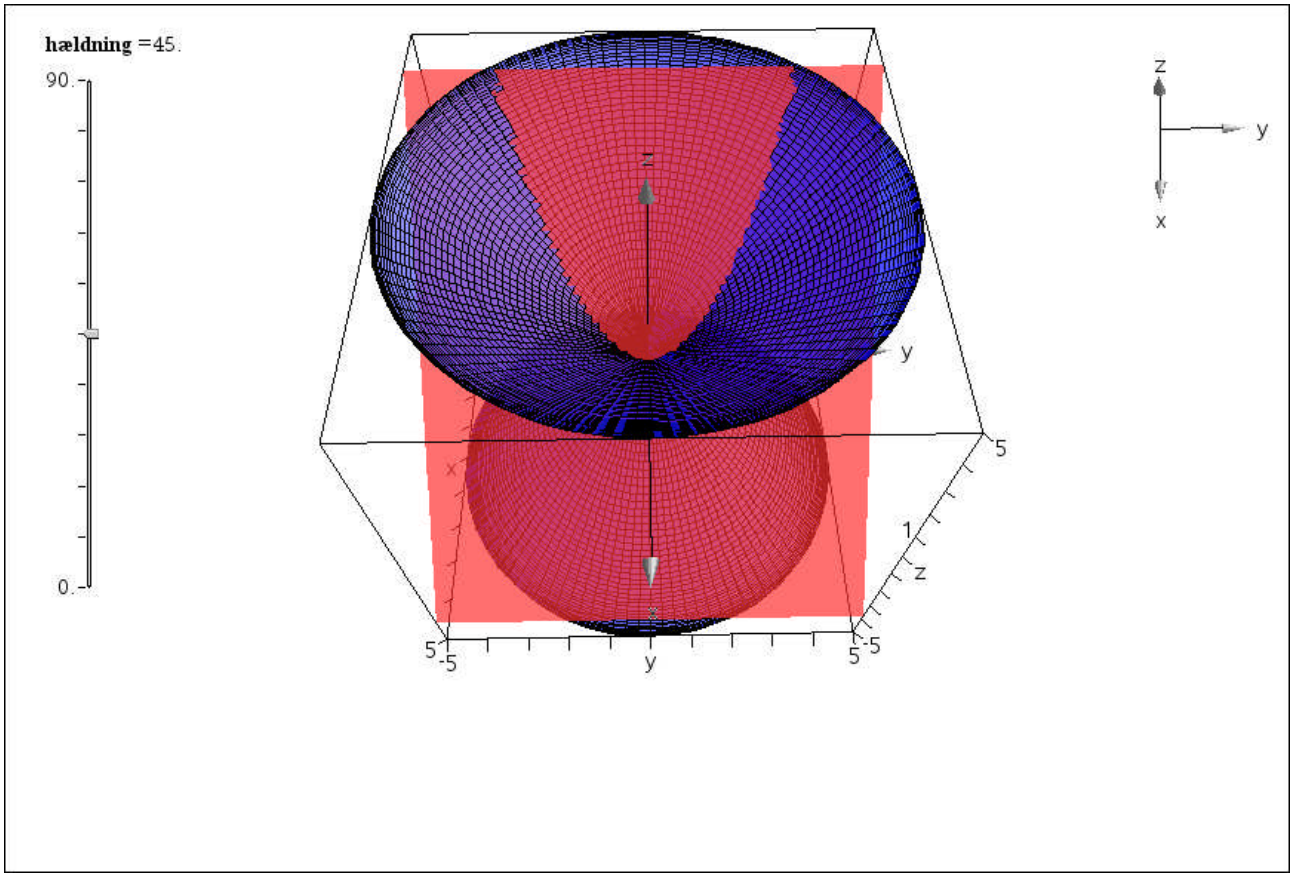
$$O_{cylinder,samlet}(r) = O_{kugle}(r) + O_{kegle,top+bund}(r)$$

Men her har vi jo set at cylinderens krumme overflade netop svarer til kuglens krumme overflade, mens cylinderens overflade i top+bund, netop svarer til keglens overflade i top+bund. Cylinderen deler altså sine træk med både kuglen og keglen!

4. Keglesnitsflader

Cylinderen og keglen er de simpleste eksempler på keglesnitsflader, dvs. flader, der producerer keglesnit, når man skører dem med en plan. Det kan man selvfølgelig sagtens illustrere med 3d-grafer, idet cylinderen eller dobbeltkeglen tegnes som grafen for en parameterfremstilling, men også den skærende plan kan med fordel tegnes som grafen for en parameterfremstilling, så den også kan stå lodret.

Det er simplest at skære en **retvinklet dobbeltkegle** med en **plan med en hældningsvinkel**. Det giver uden videre anledning til alle de fem grundtyper af keglesnit: Cirkel (0°), ellipse (mellem 0° og 45°), parabel (45°), hyperbel (mellem 45° og 90°) og endelig er der den ligesidede hyperbel (90°). Det kan fx se således ud, hvor vi har frembragt en parabel:



Vi har altså oprettet en dobbeltkegle og en plan med 100 gitterinddelinger i begge parametre, for at få skæringskurven til at fremstå rimeligt pænt. Parameterfremstillingerne ser således ud:

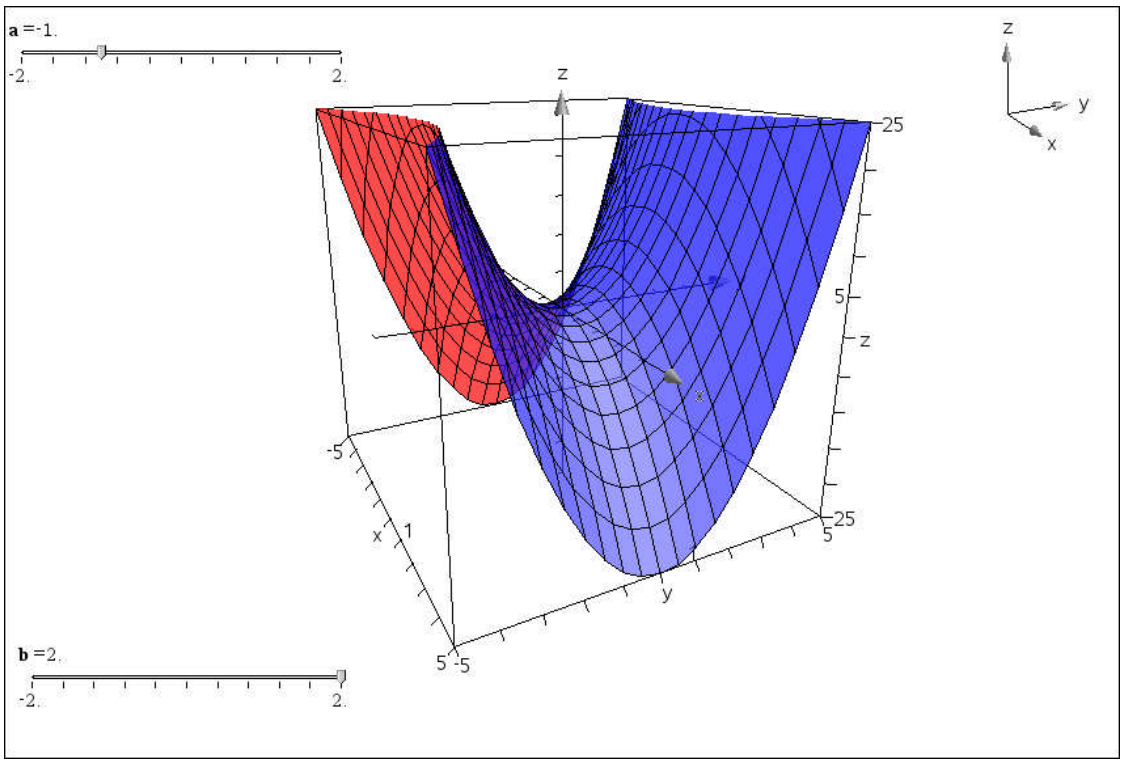
xp1	(t,u) =	$5\cdot\cos(u)\cdot\cos(t)$
yp1	(t,u) =	$5\cdot\cos(u)\cdot\sin(t)$
zp1	(t,u) =	$5\cdot\cos(u)$

xp2	(t,u) =	$-1.25-u\cdot\cos\left(\frac{\pi}{180}\cdot \text{hældning}\right)$
yp2	(t,u) =	t
zp2	(t,u) =	$2.5+u\cdot\sin\left(\frac{\pi}{180}\cdot \text{hældning}\right)$

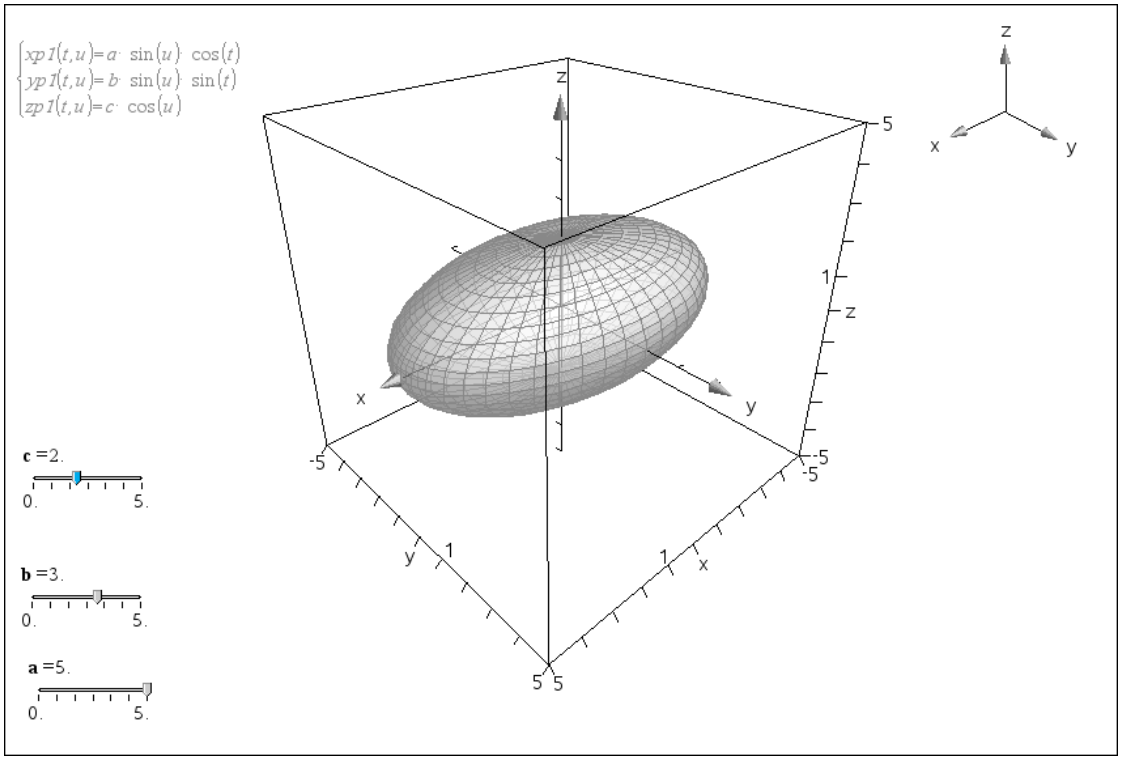
Her er parameterintervallet for *t* sat til at gå fra -5 til 5 og for u er det sat til at gå fra -10 til 10. Retningsvektorerne for planen er givet ved (0, 1, 0) og (-cos(hældning), 0, sin(hældning)) hvor hældningen dog er omsat fra grader til radianer på passende vis.

4.1 Omdrejningsflader mm

Der findes selvfølgelig også ikke-degenererede keglesnitsflader! De mest kendte fås ved drejning af keglesnit omkring en symmetriakse, dvs. omdrejningsparaboloiden, omdrejningsellipsoiden og omdrejningshyperboloiden. De kan endvidere forsynes med passende skaleringer. Tegner vi fx grafen for $z = a \cdot x^2 + b \cdot y^2$ kan vi både frembringe paraboloider, når begge koefficienterne har samme fortegn, og hyperboloider (saddelflader), når koefficienterne har modsat fortegn:

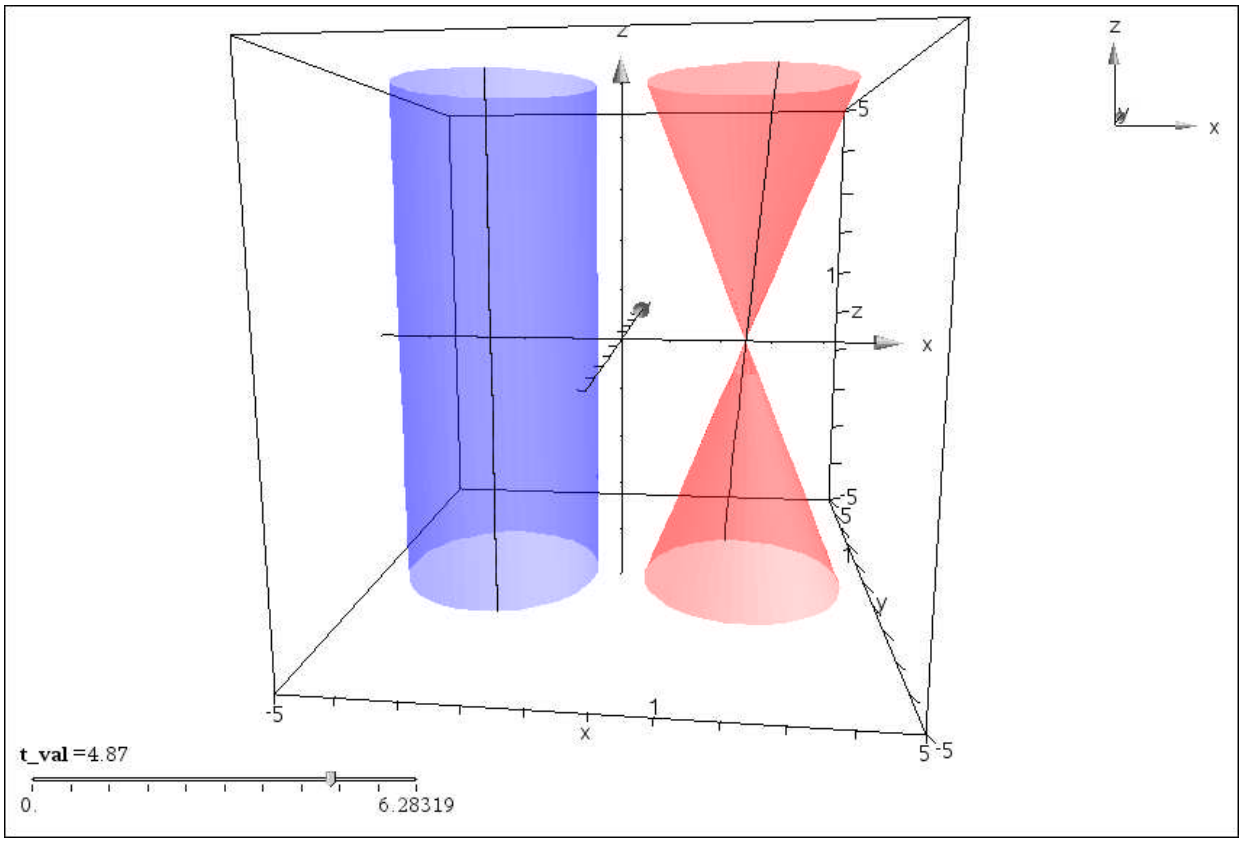


Andre keglesnitsflader må tegnes som parameterflader, fx ellipsoider:



4.2 Omdrejningshyperboloiden med 2 net

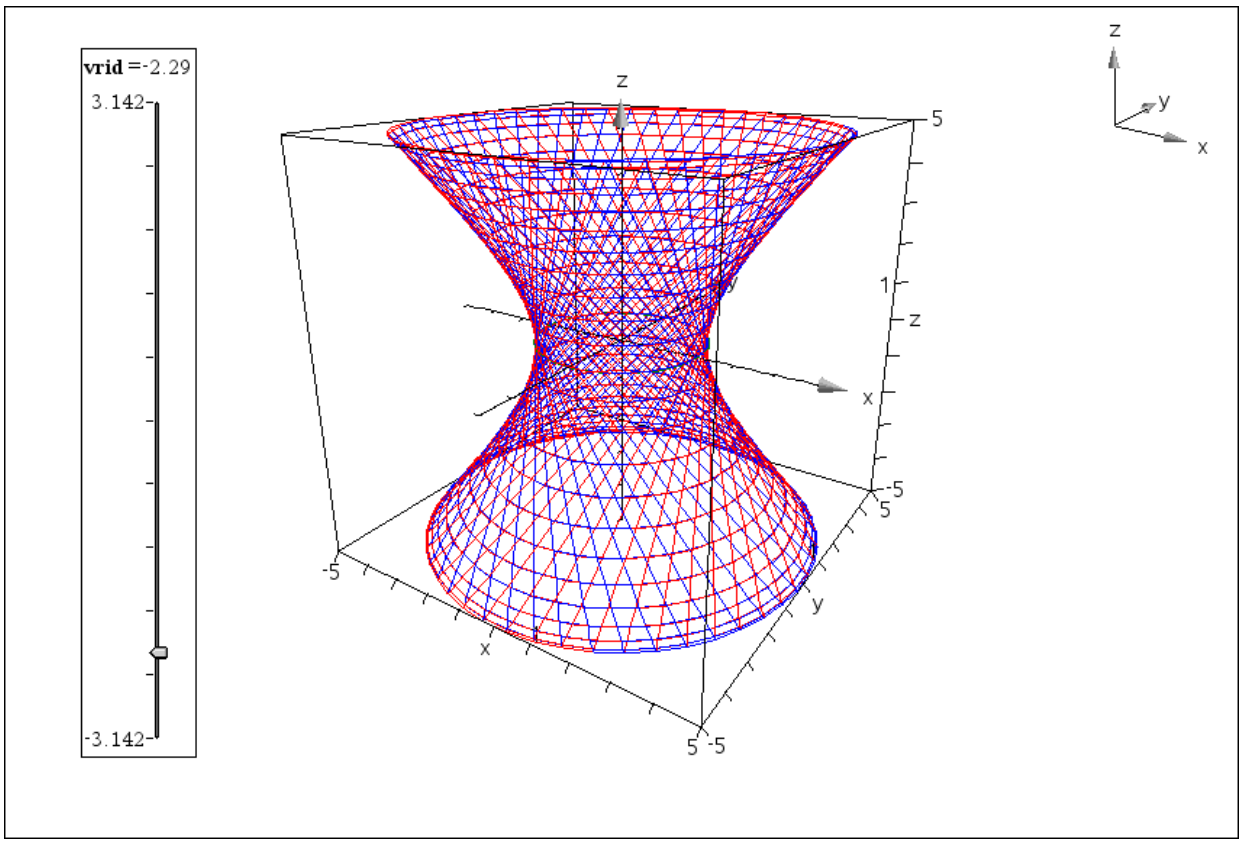
Men de mest interessante er nok keglesnitfladerne med retlinjede frembringere. Ser vi fx på cylinderen kan vi tænke den frembragt af cirklerne foroven og forneden, hvor man har forbundet et punkt på den øverste cirkel med det tilsvarende punkt lige nedenunder på den nederste cirkel, så linjestykket er parallel med cylinderens akse. Flyttes punktet rundt på cirklen frembringes netop cylinderfladen. Forbinder vi i stedet det øverste cirkelpunkt med det modsatte cirkelpunkt på den nederste cirkel fås i stedet en dobbeltkegle.



Her har vi illustreret det med gennemsigtige cylindre og dobbeltkegler så man tydelige kan se hvordan frembringeren roteres, når man trækker i skyderen (der er indstillet til radianer!)

xp1 (t,u) = $-2.5+2\cdot\cos(t)$ **yp1** (t,u) = $2\cdot\sin(t)$ **zp1** (t,u) = $5\cdot\cos(u)$ **Cylinder**	**xp2** (t,u) = $2.5+2\cdot\cos(t)\cdot\cos(u)$ **yp2** (t,u) = $2\cdot\sin(t)\cdot\cos(u)$ **zp2** (t,u) = $5\cdot\cos(u)$ **Dobbeltkegle**
xp3 (t,u) = $-2.5+2\cdot\cos(\mathbf{t_val})$ **yp3** (t,u) = $2\cdot\sin(\mathbf{t_val})$ **zp3** (t,u) = $5\cdot\cos(u)$ **Frembringer for cylinder**	**xp4** (t,u) = $2.5+2\cdot\cos(\mathbf{t_val})\cdot\cos(u)$ **yp4** (t,u) = $2\cdot\sin(\mathbf{t_val})\cdot\cos(u)$ **zp4** (t,u) = $5\cdot\cos(u)$ **Frembringer for dobbeltkegle**

Men hvad nu, hvis vi bare drejer det nederste cirkelpunkt en lille smule i forhold til det øverste? Så frembringes en omdrejningshyperboloide med 2 net, idet vi lige så godt kunnne dreje det samme stykke den modsatte vej og dermed få frembragt de modsatte frembringere.



Her ses en komplet udgave, der er tegnet som to ens omdrejningshyperboloider hvor den ene er drejet fremad og den anden er drejet lige så langt bagud. De to gitternet har fået forskellige farver, så strukturen er tydeligere. Og så er vridningsvinklen sat til at springe i trin, der netop mathcer gitterinddelingerne, så frembringerne mødes både foroven og forneden. Den samlede parameterfremstilling ser således ud for den første af hyperboloiderne:

$$\mathbf{xp1}(t,u) = \frac{5\cdot(1+\cos(u))}{2}\cdot\cos(t)+\frac{5\cdot(1-\cos(u))}{2}\cdot\cos(t+\mathbf{vrid})$$

$$\mathbf{yp1}(t,u) = \frac{5\cdot(1+\cos(u))}{2}\cdot\sin(t)+\frac{5\cdot(1-\cos(u))}{2}\cdot\sin(t+\mathbf{vrid})$$

$$\mathbf{zp1}(t,u) = 5\cdot\cos(u)$$

Højdeparameteren er cos(u). Den øverste cirkel har parameterfremstillingen (5cos(t),5 sin(t), 5) svarende til at vi sætter u = 0. Den nederste cirkel har parameterfremstillingen (5cos(t + **vrid**), 5sin(t + **vrid**), -5) svarende til at vi sætter $u = \pi$. Derefter interpoleres der lineært på standard vis i højdeparameteren cos(u).

Den næste parameterfremstilling er selvfølgelig magen til, bortset fra at der skiftes fortegn på vrid, så vi drejer den modsatte vej:

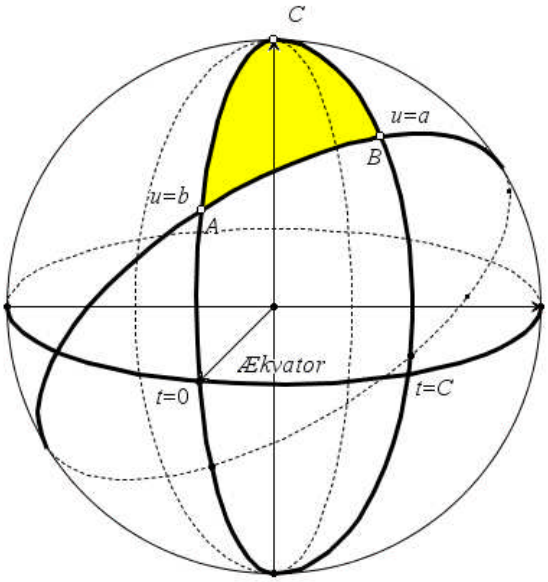
$$\mathbf{xp2}(t,u) = \frac{5\cdot(1+\cos(u))}{2}\cdot\cos(t)+\frac{5\cdot(1-\cos(u))}{2}\cdot\cos(t-\mathbf{vrid})$$

$$\mathbf{yp2}(t,u) = \frac{5\cdot(1+\cos(u))}{2}\cdot\sin(t)+\frac{5\cdot(1-\cos(u))}{2}\cdot\sin(t-\mathbf{vrid})$$

$$\mathbf{zp2}(t,u) = 5\cdot\cos(u)$$

5. Sfærisk geometri

Vi vil her primært se på hvordan man kan tegne en sfærisk trekant. Vi vil tage udgangspunkt i en typisk situation fra astronomi, hvor man har to stjerner *A* og *B* på himmelkuglen, der sammen med Nordstjernen Polaris *C* (dvs. himlens nordpol) udspænder en sfærisk trekant *ABC*. Det afgørende er da at siderne AC og BC er meridiancirkler, dvs. de har konstant *t*. Vi vil gå ud fra at vi kender polafstandene til *A* og *B*, dvs. sidelængderne *AC* = *b* og *BC* = *a*. Det svarer netop til parameterværdierne u_A og u_B. Vi vil også gå ud fra at vi kender vinklen ved *C*. For nemheds skyld anbringer vi nu A på hovedmeridianen, dvs. tA = 0. Det andet hjørnepunkt B får da parameterværdien t_B = *C*. Den følgende skitse er tegnet i et 2d **Geometriværksted**:

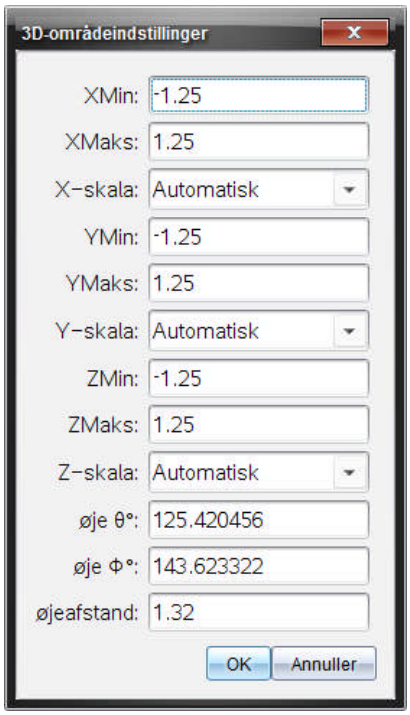


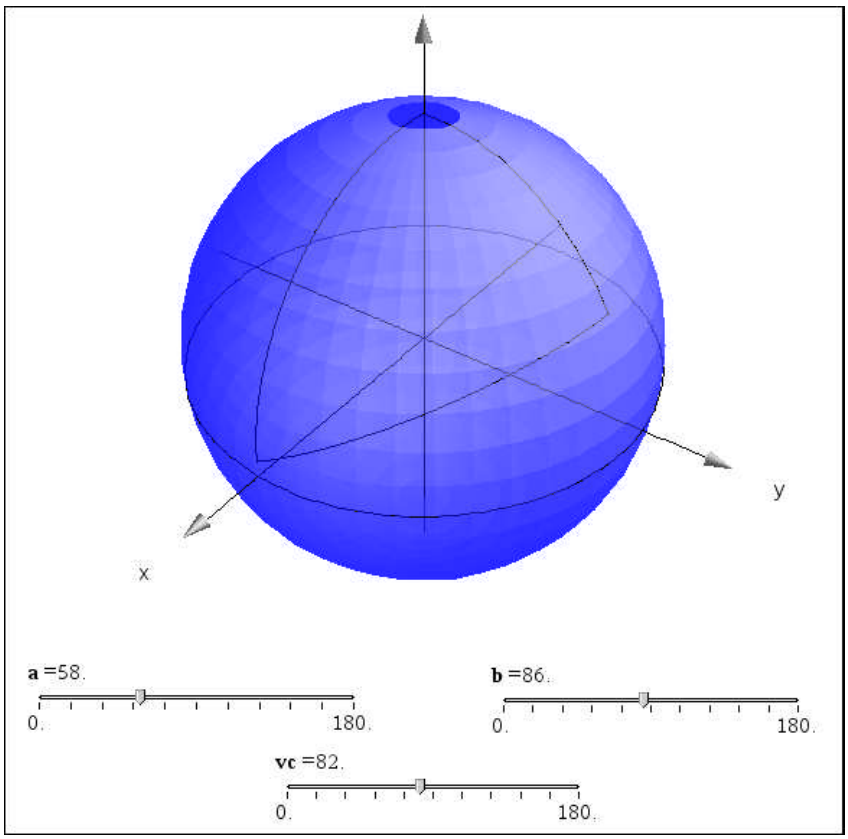
Vi er nu klar til at tegne trekanten i 3d-**Grafværkstedet**. Vi opretter skydere for siderne *a* og *b* samt vinklen *C*, alle målt i grader. Vi tegner en enhedskugle

$$\begin{cases} xp1(t,u)=\sin(u)\cdot\cos(t) \\ yp1(t,u)=\sin(u)\cdot\sin(t) \\ zp1(t,u)=\cos(u) \end{cases}$$

og afpasser koordinatsystemet passende, så enhedskuglen udfylder scenen.

Vi slår gitternettet fra, så enhedskuglen i højre grad fremstår som en flade og så vi kan tegne parameterkurver ovenpå. De ville ellers drukne gitternettet!





Vi har forsynet kuglen med en ækvatorcirkel med parameterfremstillingen, hvor vi sætter $u = \pi/2$.

xp2	(t,u) =	$\cos(t)$
yp2	(t,u) =	$\sin(t)$
zp2	(t,u) =	0

5.1 Konstruktion af den sfæriske trekant:

Tilbage står så blot parameterfremstillingerne for de tre trekantsider. Her er *AC* og *BC* rimeligt simple fordi de kører langs meridianer!

Først *AC*:

xp3	(t,u) =	$\sin\left(\frac{\mathbf{b}}{180}\cdot u\right)$
yp3	(t,u) =	0
zp3	(t,u) =	$\cos\left(\frac{\mathbf{b}}{180}\cdot u\right)$

Her angiver **b**/180 radiantallet for polvinklen *u*, der kører langs hovedmeridianen $t = 0$. Vi har altså sat $t = 0$ i kuglens parameterfremstilling og sat en begrænsning på *u*-parameteren, så den stopper efter at have nået vinklen **b**.

Så *BC*:

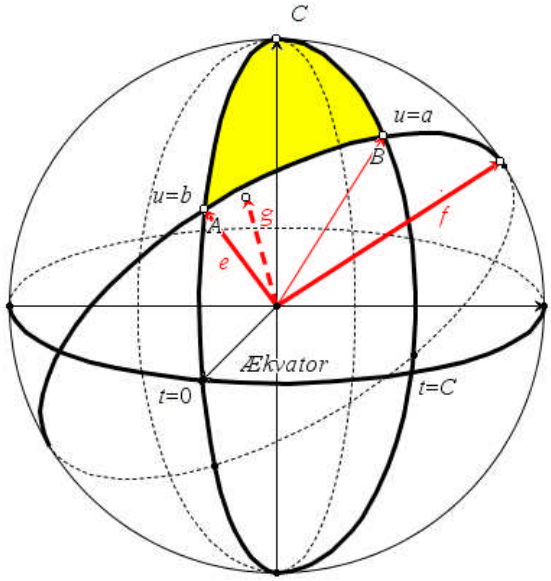
$$\mathbf{xp4}\ (t,u) = \sin\left(\frac{\mathbf{a}}{180}\cdot u\right)\cdot\cos\left(\frac{\mathbf{vc}}{180}\cdot\pi\right)$$

$$\mathbf{yp4}\ (t,u) = \sin\left(\frac{\mathbf{a}}{180}\cdot u\right)\cdot\sin\left(\frac{\mathbf{vc}}{180}\cdot\pi\right)$$

$$\mathbf{zp4}\ (t,u) = \cos\left(\frac{\mathbf{a}}{180}\cdot u\right)$$

Her angiver **a**/180 radiantallet for polvinklen *u*, der denne gang kører langs *t* = **vc**/180. Vi har altså sat *t* = *C* i kuglens parameterfremstilling og sat en begrænsning på *u*-parameteren, så den stopper efter at have nået vinklen **a**.

Først nu begynder det at blive indviklet, for siden *c* ligger på skrå, dvs. den følger en generel storcirkel, så vi skal have opskrevet en parameterfremstilling for en generel storcirkel. Princippet er simpelt nok: Find tre enhedsvektorer **e**, **f** og **g**, som står vinkelret på hinanden, og hvor **e** og **f** ligger i storcirklens plan, og hvor storcirklen starter i **e**. Så er parameterfremstillingen for hele storcirklen givet ved $\cos(t)\cdot\mathbf{e}+\sin(t)\cdot\mathbf{f}$.



Tilsvarende er punktet *A* givet ved *t* = 0 og punktet *B* givet ved *t* = *c*. Kaldes kuglens centrum for *O* er det tydeligt at vektorerne **e**, **f** og **g** må være givet ved:

$$\mathbf{e}=\overrightarrow{OA},\quad \mathbf{g}=\frac{\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|}\quad\text{og}\quad \mathbf{f}=\mathbf{g}\times\mathbf{e}.$$

Vi skal altså blot kværne løs i CAS-maskinen:

$$\mathbf{oc}:=\{0,0,1\}$$

$$\mathbf{oa}:=\left\{\sin\left(\frac{\mathbf{b}}{180}\cdot\pi\right),0,\cos\left(\frac{\mathbf{b}}{180}\cdot\pi\right)\right\}$$

$$\mathbf{ob}:=\left\{\sin\left(\frac{\mathbf{a}}{180}\cdot\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{\mathbf{vc}}{180}\cdot\pi\right),\sin\left(\frac{\mathbf{a}}{180}\cdot\pi\right)\cdot\sin\left(\frac{\mathbf{vc}}{180}\cdot\pi\right),\cos\left(\frac{\mathbf{a}}{180}\cdot\pi\right)\right\}$$

$$\mathbf{e}:=\mathbf{oa}\ \blacktriangleright\ \{0.866025,0,0.5\}$$

$$\mathbf{g}:=\frac{\mathrm{crossP}(\mathbf{oa},\mathbf{ob})}{\sqrt{\mathrm{dotP}(\mathrm{crossP}(\mathbf{oa},\mathbf{ob}),\mathrm{crossP}(\mathbf{oa},\mathbf{ob}))}}\ \blacktriangleright\ \{-0.453748,-0.42006,0.785915\}$$

$$\mathbf{f}:=\mathrm{crossP}(\mathbf{g},\mathbf{e})\ \blacktriangleright\ \{-0.21003,0.907496,0.363783\}$$

Vi får nu brug for sidelængden c, men det er netop vinklen mellem $\overrightarrow{OA}$ og $\overrightarrow{OB}$. Vi kan så lige kontrollere i forbifarten at punktet *B* netop givet ved $t = c$ i cirklens parameterfremstilling $\cos(t)\cdot\mathbf{e}+\sin(t)\cdot\mathbf{f}$:

$$\mathbf{c}:=\frac{180}{\pi}\cdot\cos^{-1}(\mathrm{dotP}(\mathbf{oa},\mathbf{ob}))\ \blacktriangleright\ 74.4048$$

$$\cos\left(\frac{\mathbf{c}}{180}\cdot\pi\right)\cdot\mathbf{e}+\sin\left(\frac{\mathbf{c}}{180}\cdot\pi\right)\cdot\mathbf{f}\ \blacktriangleright\ \{0.030524,0.874087,0.48481\}$$

Herefter kan parameterfremstillingen indsættes

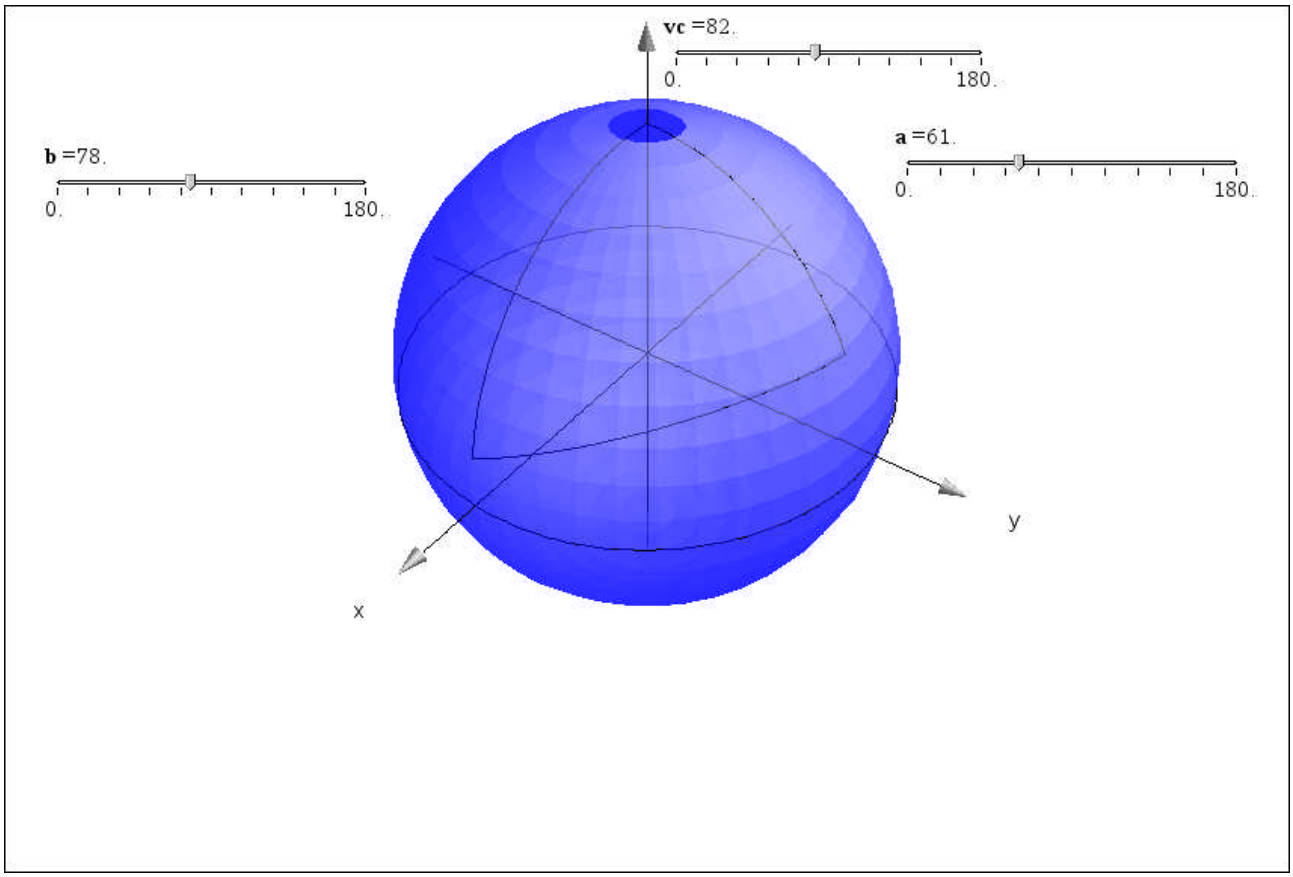
$$\mathbf{xp5}(t,u)=\sin\left(\frac{\mathbf{c}}{180}\cdot u\right)\cdot\mathbf{f}[1]+\cos\left(\frac{\mathbf{c}}{180}\cdot u\right)\cdot\mathbf{e}[1]$$

$$\mathbf{yp5}(t,u)=\sin\left(\frac{\mathbf{c}}{180}\cdot u\right)\cdot\mathbf{f}[2]+\cos\left(\frac{\mathbf{c}}{180}\cdot u\right)\cdot\mathbf{e}[2]$$

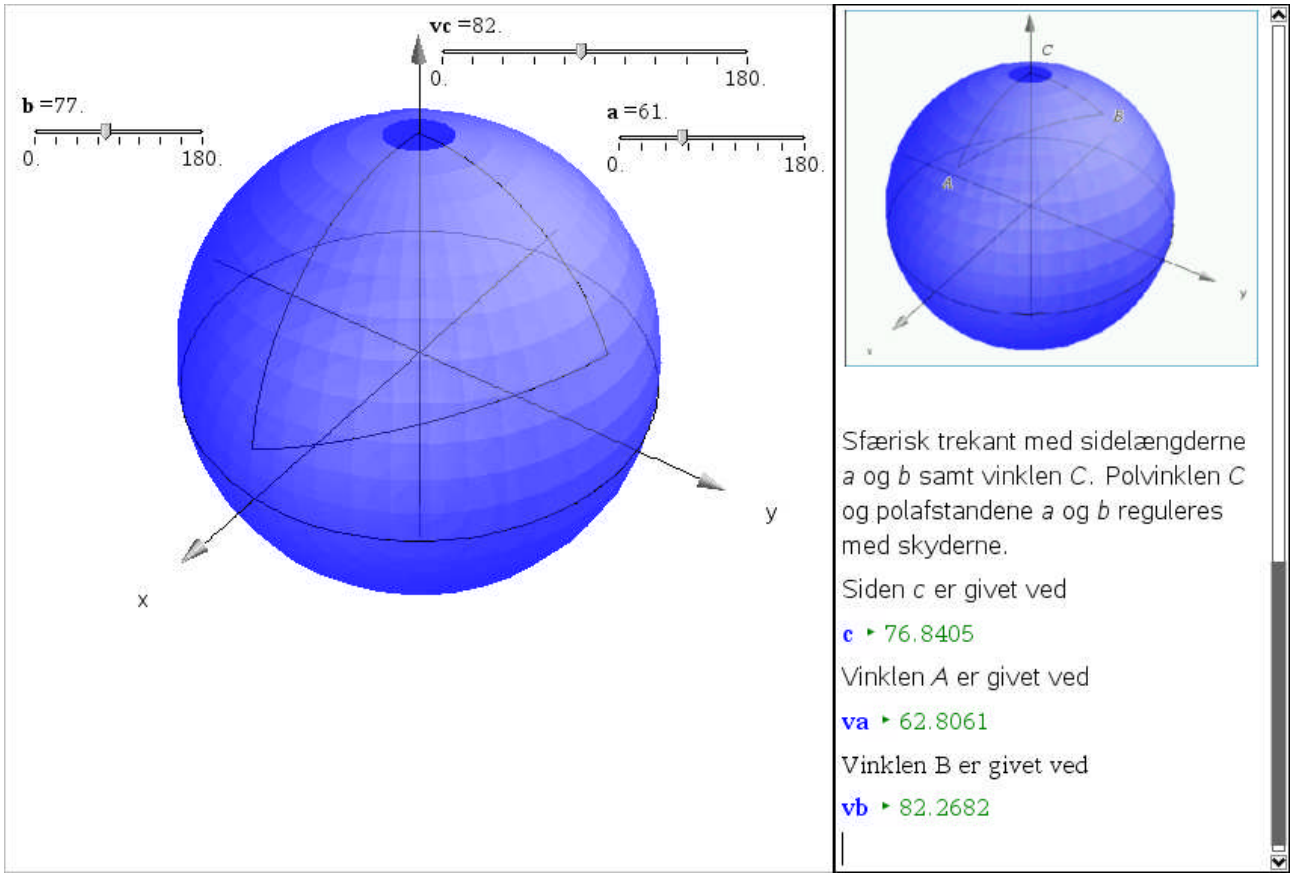
$$\mathbf{zp5}(t,u)=\sin\left(\frac{\mathbf{c}}{180}\cdot u\right)\cdot\mathbf{f}[3]+\cos\left(\frac{\mathbf{c}}{180}\cdot u\right)\cdot\mathbf{e}[3]$$

Læg mærke til at vi har sat en begrænsning på *u*-parameteren, så den stopper efter at have nået vinklen **c**.

Resultatet er den nydeligste sfæriske trekant, hvor man frit kan variere på de to sidelængder såvel som på centervinklen mellem de to sider:



Da man ikke kan sætte tekst på billeder i 3d-grafer kan man passende tage en kopi og indsætte den i et Geometrivindue og sætte betegnelser på og derefter indsætte en kopi i et Notevindue lige ved siden af, som forklarer hvad der foregår:



Her er vinklerne A og B udregnet på snedig vis som vinklen mellem normalvektorerne til storcirklerne, der udspænder siderne i trekanten. Formlerne ser således ud

$$\mathbf{va}:=\frac{180}{\pi}\cdot\cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{dotP}(\mathrm{crossP}(\mathbf{oc},\mathbf{oa}),\mathrm{crossP}(\mathbf{ob},\mathbf{oa}))}{\sqrt{\mathrm{dotP}(\mathrm{crossP}(\mathbf{oc},\mathbf{oa}),\mathrm{crossP}(\mathbf{oc},\mathbf{oa}))}\cdot\sqrt{\mathrm{dotP}(\mathrm{crossP}(\mathbf{ob},\mathbf{oa}),\mathrm{crossP}(\mathbf{ob},\mathbf{oa}))}}\right)$$

$$\mathbf{vb}:=\frac{180}{\pi}\cdot\cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{dotP}(\mathrm{crossP}(\mathbf{oc},\mathbf{ob}),\mathrm{crossP}(\mathbf{oa},\mathbf{ob}))}{\sqrt{\mathrm{dotP}(\mathrm{crossP}(\mathbf{oc},\mathbf{ob}),\mathrm{crossP}(\mathbf{oc},\mathbf{ob}))}\cdot\sqrt{\mathrm{dotP}(\mathrm{crossP}(\mathbf{oa},\mathbf{ob}),\mathrm{crossP}(\mathbf{oa},\mathbf{ob}))}}\right)$$

Dermed er vi godt i gang med den sfæriske geometri!